سلسلة كتب مكملان المدرسية المصرية



الهندسة المستوية

الجزء الثاني

مقرر السنة الثانية من التعليم الثانوى

تأليف

محمد خالد حسنين

مساعد المفتش بنظارة المعارف العمومية

١٣٣١ – ١٩١٣

مطبعة المعارف بشارع الفجالة بمصر



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سائر الانبياء والمرسلين (وبعد) فلما قررت نظارة المعارف العمومية اعادة تدريس علم الهندسة المستوية وسائر العلوم الرياضية باللغة العربية طرق الرياضيون أبواب التأليف وسارعوا الى التصنيف وكثرت الكتب الرياضية باللغة العربية كما كثر غيرها من الكتب الادبية

غير أن أكثر هذه المؤلفات لا يتفق وروح البرنامج الذى سنّته المعارف المصرية لمدارسها الثانوية لهذا أحببت أن أضع كتاباً يكون شاملاً لما تقررت دراسته على الطلاب فقمت بتأليف هذا المختصر وجعلته على أحدث الطرق

ولما كان علم الهندسة المستوية يدرس فى الثلاث السنين الاولى من التعليم الثانوى قسمت كتابى هذا الى ثلاثة اجزاء وجعلت كل

جزء منها خاصاً بما تقررت دراسته فى كل سنة منها وقد اخترت ماوضعته
نظارة المعارف العمومية من الاصطلاحات العربية وا كثرت من التمارين
وأضفت اليها بعضاً من المسائل المحلولة كى يستعين بها الطالب فى حل
غيرها وتكون نموذجاً له عند كتابة حلول المسائل التى تلقى عليه واسأل
الله أن يجعله نافعاً أنه على ما يشاء قدير ؟

محمد خالد حسنين

محتويات الكتاب

الباب الصفحة

القسم الأول (فى الدائرة)

الباب	الصفحة

القسم الثانى (فى المساحات)



الجزء الثاني

ويحتوى على قسمين

القسم الاول (فى الدائرة)

البـــاب الأول

فى التمهيدات والتعاريف الأولية

١ — الدائرة هى شكل مستو يحيط به خط جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطـة داخلة تسمى مركزاً ففى شكل (٩٦) النقطة م ابعادها عن جميع نقط الخط الذى حولها متساوية ويسمى الخط المحدد للدائرة بمحيطها

(شكل ٩٦)

٢ — نصف قطر الدائرة هو الخط الذى يصل المركز باحدى نقط المحيط مثل م ه

(ملاحظة) محيط الدائرة هو فى الحقيقة المحل الهندسى لنقطة تسير وهى حافظة لبعد معين بينها و بين نقطة اخرى ثابتة و ينتج من هذا التعريف أن البعد المعين هو نصف القطر وان انصاف الاقطار لدائرة واحدة متساوية

٣ — يقال أن الدائرتين متساويتان متى كان نصف قطر احداهما يساوى نصف قطر الأخرى

(ملاحظة) اذا طبقت احدى دائرتين متساويتين على الاخرى ووقع مركز الاولى على مركز الثانية انطبقت الدائرتان كل على الاخرى تمام الانطباق ووقعت جميع نقط محيط الدائرة الاولى على جميع نقط محيط الدائرة الثانية

٤ — اذا اشتركت عدة دوائر فى مركز واحد سميت متحدة المركز فمثلا الدوائر ا ٬ ب ٬ حـ شكل (٩٧) تسمى متحدة المركز لان مركز كل منها هو م



(شكل ٩٧)

٥ — تكون النقطة خارج الدائرة أو عليها أو داخلها على حسب ما يكون بعدها عن المركز اكبر من نصف القطر أو مساوياً له أو اصغر منه

ففى شكل (٩٨) نقطة ا خارج الدائرة لان ا م اكبر من نصف القطر ٬ نقطة ب على الدائرة لان ب م يساوى نصف القطر ٬ نقطة حـ داخل الدائرة لان حـ م اصغر من نصف القطر

(شكل ٩٨)

٦ — قطر الدائرة هو مستقيم يمر بالمركز وينتهى طرفاه بالمحيط مثل ا ب شكل (٩٩)

٧ — وتر الدائرة هو مستقيم يصل اى نقطتين على المحيط مثل المستقيم حـ ء شكل (٩٩)

(شكل ٩٩)

٨ — قوس الدائرة هو جزء من محيطها مثل حـ هـ ء شكل (٩٩)

٩ — قطر الدائره يقسم المحيط الى قوسين متساويين كل منهما يساوى نصف المحيط ويسمى الشكل الذى يحده نصف المحيط والقطر بنصف الدائرة

وتر الدائرة الذى لا يمر بمركزها يقسم المحيط الى قوسين غير متساويين ويسمى اكبرهما القوس الاكبر واصغرهما القوس الاصغر

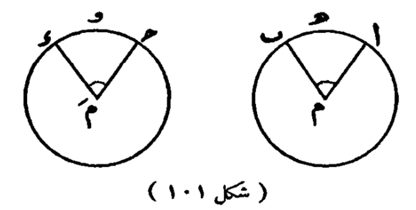
١٠ — الزاوية المركزية هى ما كان رأسها فى مركز الدائرة وضلعاها نصفى قطرين مثل ∠ ا م ب شكل (١٠٠)

(شكل ١٠٠)

الباب الثانى
فى الأقواس والزوايا والأوتار

« نظرية ٤٧ »

الزوايا المركزية المتساوية فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية تقابلها أقواس متساوية



(شكل ١٠١)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها مَ وان الزاوية المركزية ا م ب = الزاوية المركزية حـ مَ ى

(المطلوب اثباته) أن القوس ا هـ ب = حـ و ى

(البرهان) نطبق الدائرة الاولى على الثانية على شرط أن يقع المركز م على مَ ونصف القطر م ا على مَ حـ

فمن حيث ان الدائرتين متساويتان ينطبق محيط الاولى على محيط الثانية وتقع نقطة ا على نقطة حـ

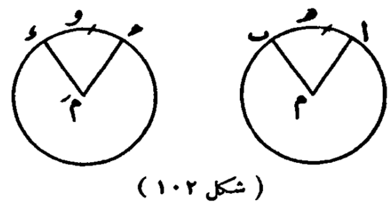
ومن حيث ان ∠ ا م ب = ∠ حـ مَ ء بالفرض يقع نصف القطر م ب على مَ ء وتقع نقطة ب على نقطة ء

فينطبق اذن القوس ا هـ ب على القوس حـ و ء وبذلك يتساويان وهو المطلوب

(نتيجة) اذا اختلفت زاويتان مركزيتان فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية فالزاوية الكبرى يقابلها القوس الاكبر

« نظرية ٤٨ »
(وهى عكس نظرية ٤٧)

الاقواس المتساوية فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية تقابلها زوايا مركزية متساوية



(شكل ١٠٢)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها مَ وان القوس ا هـ ب = القوس حـ و ء

(المطلوب اثباته) أن الزاوية المركزية ا م ب = الزاوية المركزية حـ مَ ء

(البرهان) نطبق الدائرة الاولى على الثانية على شرط أن يقع

المركز م على م' ونصف القطر م ا على م' حـ

فمن حيث ان الدائرتين متساويتان ينطبق محيط الاولى على محيط الثانية وتقع نقطة ا على نقطة حـ

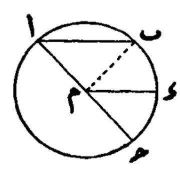
ومن حيث ان القوس ا هـ ب = القوس حـ و ى بالفرض تقع نقطة ب على نقطة ى

فتنطبق اذن الزاوية المركزية ا م ب على حـ م' ى وبذلك تتساويان وهو المطلوب

(نتيجة) اذا اختلف قوسان فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية فالقوس الاكبر تقابله الزاوية المركزية الكبرى

تمارين (١٧)

(١) اذا فرضت دائرة مركزها م ورسم فيها القطر ا م حـ والوتر ا ب ثم رسم نصف القطر م ى يوازى ا ب فبرهن على ان نقطة ى منتصف القوس ب حـ



(شكل ١٠٣)

(البرهان) نصل من م الى ب

فمن حيث ان م ب = م ا تكون ∠ م ب ا = ∠ م ا ب (نظرية ٦)

ولكن ∠ ب م ى = ∠ م ب ا (بالتبادل)

، ∠ حـ م ى = ∠ م ا ب (بالتناظر)

اذن ∠ ب م ى = ∠ حـ م ى

ويكون القوس ب ى = القوس حـ ى (نظرية ٤٧)

اى ان نقطة ى منتصف القوس حـ ب (وهو المطلوب)

(٢) ۿ ، ا ، ب ثلاث نقط على محيط دائرة مركزها م فاذا فرض أن الوتر ۿ ا = الوتر ۿ ب فبرهن على أن نقطة ۿ منتصف القوس ا ب وان م ۿ يقطع الوتر ا ب فى منتصفه

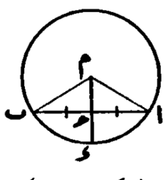
(٣) اذا فرضت نقطة مثل ۿ على محيط دائرة مركزها م وكان بعدا ۿ عن نصفى القطرين م ا ، م ب متساويين فبرهن على أن القوس ا ۿ يساوى القوس ب ۿ

(٤) اذا رسم وتر يوازى قطر دائرة فبرهن على انهما يحصران بينهما قوسين متساويين

(٥) اذا رسم وتران متوازيان فى دائرة فبرهن على انهما يحصران بينهما قوسين متساويين

« نظرية ٤٩ »

نصف القطر الذى ينصف وتراً فى دائرة عمود على هذا الوتر ومنصف لقوسه



(شكل ١٠٤)

(المفروض) أن ا ب وتر فى الدائرة التى مركزها م وان م ى ينصف الوتر ا ب فى ح

(المطلوب اثباته) أن م ى عمود على ا ب وان نقطة ى منتصف القوس ا ى ب

(البرهان) اولا — نصل م ا ، م ب فيحدث المثلثان ا ح م ، ب ح م

فى هذين المثلثين

من حيث ان {
م ح مشترك بينهما
، ا ح = ب ح بالفرض
، ا م = ب م لانهما نصفا قطرين

ينطبق △ ا ح م على △ ب ح م (نظرية ٨)

وينتج ان ∠ ا ح م = ∠ ب ح م

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

اى ان م ح عمود على ا ب وهو المطلوب

ثانياً — من تساوى المثلثين ا ح م ، ب ح م ينتج ان

∠ ا م ى = ∠ ب م ى

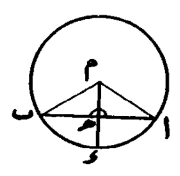
ومن حيث ان هاتين الزاويتين مركزيتان بالنسبة للدائرة

يكون القوس ا ى = القوس ب ى (نظرية ٤٧)
وتكون نقطة ى منتصف القوس ا ى ب وهو المطلوب

« نظرية ٥٠ »

(وهى عكس نظرية ٤٩)

نصف القطر المرسوم عموداً على وتر ينصفه و ينصف قوسه



(شكل ١٠٥)

(المفروض) ان ا ب وتر فى الدائرة التى مركزها م وأن م ى عمود على ا ب

(المطلوب اثباته) ان نقطة ح منتصف الوتر ا ب وأن نقطة ى منتصف القوس ا ى ب

(البرهان) اولا — نصل م ا ، م ب فيحدث المثلثان ا ح م ، ب ح م

فى هذين المثلثين القائمى الزاوية

من حيث ان { م ح مشترك بينهما
، ا م = ب م لانهما نصفا قطرين

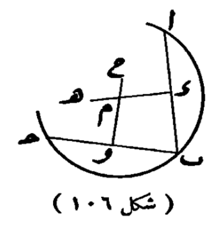
ينطبق △ ا ح م على △ ب ح م (نظرية ٢١)

و ينتج ان ا ح = ب ح

اى ان نقطة حـ منتصف الوتر ا ب وهو المطلوب
ثانياً — لاثبات ان نقطة ى منتصف القوس ا ى ب
راجع برهنة القسم الثانى من النظرية السابقة
(نتيجة) المستقيم المقام عموداً على منتصف وتر يمر بمركز دائرته

« نظرية ٥١ »

حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر محيط دائرة واحدة ولا يمر سواه



(شكل ١٠٦)

(المفروض) ان ا ٯ ب ٯ حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
(المطلوب اثباته) انه يمر بهـذه النقط محيط دائرة واحد ولا يمر غيره
(البرهان) اولا — نصل ا ب ٯ ب حـ
ثم ننصف ا ب فى ى ونقيم ى هـ عموداً على ا ب
وكذلك ننصف ب حـ فى و ونقيم و ع عموداً على ب حـ

فمن حيث ان ا ب ليس على استقامة ب حـ يتقاطع العمودان في نقطة مثل م

ومن حيث ان نقطة م هي احدى نقط العمود المقام من منتصف ا ب وكذلك احدى نقط العمود المقام من منتصف ب حـ فتكون على ابعاد متساوية من ا ، ب ، حـ (المحال الهندسية مثال ٣)

اي انه اذا ركز في نقطة م ورسمت دائرة بنصف قطر يساوي م ا فان محيط هذه الدائرة يمر بالنقط ا ، ب ، حـ

وهو المطلوب

(ثانياً) ومن حيث ان العمودين ء هـ ، و ح لا يتقاطعان الا في نقطة واحدة فلا يوجد الا دائرة واحدة مركزها تقاطع العمودين يمر محيطها بالنقط الثلاث ا ، ب ، حـ وهو المطلوب

تمارين (١٨)

(١) اذا فرضت نقطة مثل ا خارج دائرة مركزها م ورسم منها مستقيمان متساويان الى محيط الدائرة مثل ا ب ، ا حـ فبرهن على ان منصف زاوية ب ا حـ يمر بالمركز

(المفروض) ان نقطة ا خارج الدائرة وان ا ب = ا حـ

(المطلوب اثباته) ان منصف ∠ ب ا حـ يمر بالمركز م

(البرهان) نصل ب حـ فيحدث المثلث ب ا حـ متساوي الساقين (ب ا = ب حـ بالفرض)

(شكل ١٠٧)

فاذا نصفت زاوية رأسه ا بالمستقيم ا ء يكون هذا المنصف عموداً على الوتر ب حـ

ومن حيث ان ء ا عمود على الوتر ب حـ يمر بالمركز م

(نتيجة نظرية ٥٠) وهو المطلوب

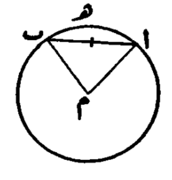
(٢) ا ب ، ا حـ وتران متساويان فى دائرة برهن على ان منصف ∠ ب ا حـ يمر بالمركز

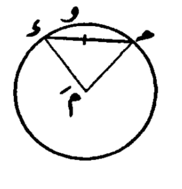
(٣) اذا قطع مستقيم دائرتين متحدتى المركز فان جزأيه المحصورين بين محيطيهما متساويان

(٤) دائرتان مركزاهما م ، مَ متفاطعتان فى ا ، ب برهن على ان مركزيهما م ، مَ ومنصف الوتر المشترك ا ب على استقامة واحدة

« نظرية ٥٢ »

الاوتار المتساوية فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية اقواسها متساوية





(شكل ١٠٨)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها مَ وان الوتر ا ب يساوى الوتر حـ ء

(المطلوب اثباته) ان القوس ا هـ ب = القوس حـ و ى

(البرهان) نصل م ا ، م ب ، م´ حـ ، م´ ى فيحدث المثلثان

ا م ب ، حـ م´ ى

فى هذين المثلثين

من حيث ان (ا م = م´ حـ (لانهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين)

، م ب = م´ ى (« « « « «)

، ا ب = حـ ى بالفرض)

يتساوى المثلثان ا م ب ، حـ م´ ى (نظرية ٨)

وينتج ان ∠ ا م ب = ∠ حـ م´ ى

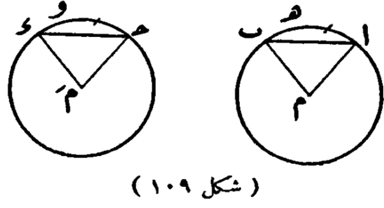
ومن حيث ان هاتين الزاويتين مركزيتين

فالقوس ا هـ ب = القوس حـ و ى وهو المطلوب

« نظرية ٥٣ »

(وهي عكس نظرية ٥٢)

الاقواس المتساوية فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية أوتارها متساوية



(شكل ١٠٩)

(المفروض) أن الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى

مركزها م َ وان القوس ا هـ ب = القوس حـ و ى

(المطلوب اثباته) ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى

(البرهان) نصل م ا ، م ب ، م َ حـ ، م َ ى فيحدث المثلثان

ا م ب ، حـ م َ ى

فى هذين المثلثين

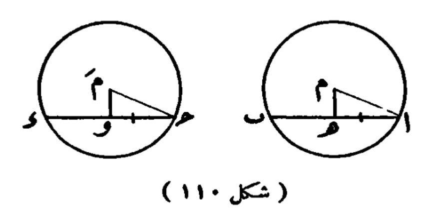
من حيث ان { م ا = م َ حـ (لانهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين)
، م ب = م َ ى (» » » » »)
، ∠ ا م ب = ∠ حـ م َ ى (نظرية ٤٨) }

ينطبق △ ا م ب على △ حـ م َ ى (نظرية ٤)

وينتج ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى وهو المطلوب

« نظرية ٥٤ »

الاوتار المتساوية فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية أبعادها عن المركز أو المراكز متساوية



(شكل ١١٠)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها

م´ وان الوتر ا ب يساوى الوتر حـ ى وان م هـ ، م´ و عمودان على ا ب ، حـ ى

(المطلوب اثباته) ان العمود م هـ يساوى العمود م´ و

(البرهان) نصل م ا ، م´ حـ فيحدث المثلثان ا م هـ ، حـ م´ و

فى هذين المثلثين القائمى الزاوية

من حيث ان | ا م = حـ م´ (لانهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين)
| ا هـ = حـ و (لانهما نصفا وترين متساويين نظرية ٥٠)

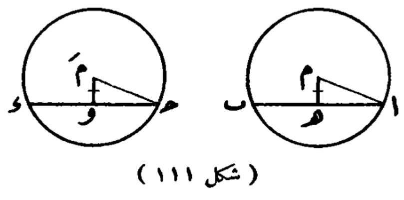
يتساوى المثلثان (نظرية ٢١)

وينتج أن م هـ = م´ و وهو المطلوب

« نظرية ٥٥ »

(وهى عكس نظرية ٥٤)

الاوتار التى على ابعاد متساوية من مركز دائرة أو مراكز دوائر متساوية تكون متساوية



(شكل ١١١)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها م´ وان ا ب ، حـ ى وتران فى الدائرتين وان م هـ العمود

على ا ب يساوى م َو العمود على حـ ى

(المطلوب اثباته) ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى

(البرهان) نصل م ا ، م َحـ فيحدث المثلثان ا م هـ ، حـ م َو

فى هذين المثلثين القائمى الزاوية

من حيث ان { ا م = حـ م َ لانهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين
م هـ = م َو بالفرض }

يتساوى المثلثان (نظرية ٢١)

وينتج ان ا هـ = حـ و

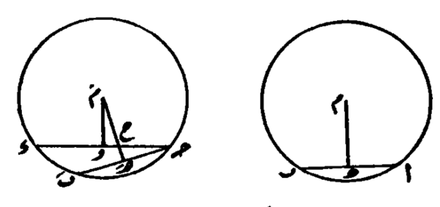
ولكن ا هـ يساوى نصف ا ب (نظرية ٥٠)

، حـ و يساوى نصف حـ ى (« ٥٠)

اذن الوتر ا ب = الوتر حـ ى وهو المطلوب

« نظرية ٥٦ »

اذا اختلف وتران فى دائرة واحدة أو دوائر متساوية كان بعد الوتر الاكبر عن المركز أصغر من بعد الوتر الاصغر



(شكل ١١٢)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى

مركزها م´ وان الوتر ا ب اصغر من الوتر حـ ء وأن م هـ ، م´ و عمودان على ا ب ، حـ ء

(المطلوب اثباته) ان م هـ اكبر من م´ و

(البرهان) نطبق الدائرة التى مركزها م على الدائرة التى مركزها م´ بحيث يقع المركز م على المركز م´ وتقع النقطة ا على حـ

فمن حيث ان الدائرتين متساويتان بالفرض ينطبق محيط الاولى على محيط الثانية

ومن حيث ان الوتر ا ب اصغر من الوتر حـ ء بالفرض فيكون القوس الاصغر ا ب اصغر من القوس الاصغر حـ ء وتأخذ نقطة ب وضعاً بين النقطتين حـ ، ء مثل ب´ ويأخذ العمود م هـ الوضع م´ هـ´

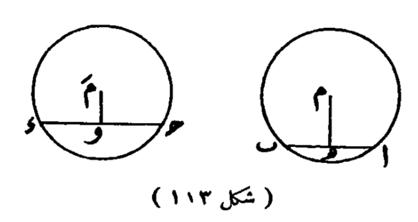
ولكن من حيث ان حـ ء ، حـ ب´ يتلاقيان فى نقطة حـ فلا بد ان يأخذ العمود م´ هـ´ اتجاهاً غير العمود م´ و وتفرض انه يقطع حـ ء فى نقطة ع

ولكن	م´ ع اكبر من م´ و	(نظرية ١٦)
،	م´ هـ´ اكبر من م´ ع	(بالبداهة)
اذن	م´ هـ´ اكبر من م´ و	
أى ان	م هـ اكبر من م´ و	وهو المطلوب

« نظرية ٥٧ »

(وهى عكس نظرية ٥٦)

اذا اختلف بعدا وترين فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية عن المركز كان اكبرهما أصغرهما بعداً



(شكل ١١٣)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التي مركزها مَ وان م هـ العمود على الوتر ا ب اكبر من مَ و العمود على الوتر حـ ء

(المطلوب اثباته) ان الوتر ا ب اصغر من الوتر حـ ء

(البرهان) ان لم يكن الوتر ا ب اصغر من الوتر حـ ء فاما ان يساويه واما أن يكون اكبر منه

فان كان الوتر ا ب = الوتر حـ ء

لزم ان يكون العمود م هـ = العمود مَ و (نظرية ٥٤)

وهذا خلاف الفرض

وان كان الوتر ا ب اكبر من الوتر حـ ء

لزم ان يكون العمود م هـ اصغر من العمود مَ و (نظرية ٥٦)

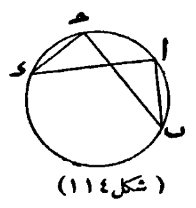
وهذا خلاف الفرض ايضاً

وعلى ذلك فالوتر ا ب لا يمكن ان يساوى الوتر حـ ء كما انه لا يمكن ان يكون اكبر منه

اذن يجب ان يكون الوتر ا ب اصغر من الوتر حـ ء وهو المطلوب

تمارين (١٩)

(١) ا ى ، حـ ب وتران متقاطعان فى دائرة فاذا فرض انهما متساويان فبرهن على ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى



(شكل ١١٤)

(البرهان) من حيث ان الوتر ا ى = الوتر حـ ب يكون القوس ا حـ ى = القوس ب ا حـ (نظرية ٥٢)

وبطرح القوس الاصغر ا حـ من طرفى المتساوية السابقة يكون القوس ا حـ ى — القوس ا حـ = القوس ب ا حـ — القوس ا حـ

اى ان القوس ا ب = القوس حـ ى

وبذلك يكون الوتر ا ب = الوتر حـ ى (نظرية ٥٣)

وهو المطلوب

(٢) اذا رسمت فى دائرة اوتار متلاقية ومتساوية مثل ا ب ، ب حـ ، حـ ى ، ى هـ فبرهن على ان الوتر ا حـ يساوى الوتر ب ى = الوتر حـ هـ

(٣) فى شكل (١١٤) اذا فرض ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى فبرهن على ان الوتر ا ى = الوتر حـ ب

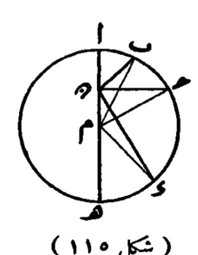
« نظرية ٥٨ »

اذا فرضت نقطة داخل دائرة غير مركزها ورسم منها عدة مستقيمات الى المحيط كان

(أولا) اكبر هذه المستقيمات هو المار بالمركز

(ثانياً) اصغر هذه المستقيمات هو امتداد الاكبر ليكون قطراً

(ثالثاً) المستقيم الاكبر ما كان اقرب الى المركز



(شكل ١١٥)

(المفروض) ان نقطة ن داخل الدائرة التى مركزها م وأن ن ا ، ن ب ، ن حـ ، ن ى ، ن هـ عدة مستقيمات ايا كانت رسمت من ن الى المحيط وان ا ن م هـ قطر فى الدائرة

(المطلوب اثباته) ان ن م هـ هو اكبر هذه المستقيمات وأن ن ا هو اصغرها وأن ن ى أكبر من ن حـ

(البرهان) نصل م ى ، م حـ ، م ب ثم نقول

اولا — فى المثلث ن م ى نعلم أن

ن م + م ى > ن ى (نظرية ١٣)

ولكن م ى = م هـ لانهما نصفا قطرين

اذن ن م + م ه > ن د

أى ان ن ه > ن د

وكذلك يبرهن على أن ن ه اكبر من اى مستقيم آخر يرسم من ن الى المحيط

وبذلك يكون ن ه اكبر هذه المستقيمات وهو المطلوب

ثانياً — فى المثلث ن م ب نعلم أن

م ب − م ن < ن ب (نظرية ١٤)

ولكن م ب = م ا لانهما نصفا قطرين

اذن م ا − م ن < ن ب

أى ان ن ا < ن ب

وكذلك يبرهن على ان ن ا أصغر من اى مستقيم آخر يرسم من ن الى المحيط وبذلك يكون أصغر هذه المستقيمات وهو المطلوب

ثالثاً — فى المثلثين ن م د و ن م ح

من حيث ان:
- ن م مشترك بين المثلثين
- و م د = م ح لانهما نصفا قطرين
- و ∠ ن م د اكبر من ∠ ن م ح

يكون ن د اكبر من ن ح (نظرية ٢٢)

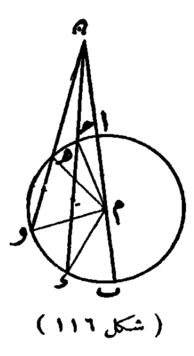
وهو المطلوب

« نظرية ٥٩ »

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدة قواطع لها كان

(اولا) اكبر هذه القواطع هو المار بالمركز

(ثانياً) القاطع الاكبر ما كان اقرب الى المركز
(ثالثاً) اصغر الاجزاء الخارجة للقواطع هو جزء القاطع المار بالمركز
(رابعاً) الجزء الخارج الاصغر ما كان قاطعه اقرب الى المركز



(شكل ١١٦)

(المفروض) ان نقطة ن خارج الدائرة التى مركزها م وأن ن ا ب ، ن ح د ، ن ه و عدة قواطع رسمت من ن لهذه الدائرة كما يتفق وان ن ا ب يمر بمركز الدائرة

(المطلوب اثباته) ان ن ا ب هو اكبر هذه القواطع وأن ن ح د اكبر من ن ه و وأن ن ا اصغر الاجزاء الخارجة لجميع القواطع وان ن ح اصغر من ن ه

(البرهان) نصل م ح ، م د ، م ه ، م و ثم نقول

اولا — فى المثلث ن م د نعلم أن

ن م + م د > ن د . (نظرية ١٣)

ولكن م د = م ب لانهما نصفا قطرين

اذن ن م + م ب > ن ء

اى ان ن ب > ن ء

وكذلك يبرهن على ان ن ب اكبر من اى قاطع آخر يرسم من ن للدائرة و بذلك يكون ن ا ب اكبر هذه القواطع (وهو المطلوب)

ثانياً — فى المثلثين ن م ء ، ن م و

من حيث ان { ن م مشترك بين المثلثين ، م ء = م و لانهما نصفا قطرين ، ∠ ن م ء اكبر من ∠ ن م و

يكون ن ح ء أكبر من ن ه و (نظرية ٢٢)

وهو المطلوب

ثالثاً — فى المثلث ن م ح نعلم ان

ن م — م ح < ن ح (نظرية ١٤)

ولكن م ح = م ا لانهما نصفا قطرين

اذن ن م — م ا < ن ح

أى أن ن ا < ن ح

وكذلك يبرهن على أن ن ا أصغر من اى جزء خارجى آخر

و بذلك يكون ن ا أصغر الاجزاء الخارجة وهو المطلوب

رابعاً — فى المثلث ن م ه باعتبار ان نقطة ح داخله يكون

ن ه + م ه > ن ح + م ح (نظرية ١٥)

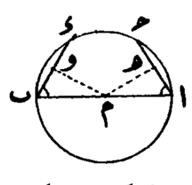
ولكن م ه = م ح لانهما نصفا قطرين

اذن ن ه > ن ح وهو المطلوب

(تعريف) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطتين يقال انهما متقاطعتان مثل الدائرتين فى كل من شكلى ١٢٤ و ١٢٥

تمارين (٢٠)

(١) اذا رسم وتران ا حـ ، ب ى فى دائرة من نهايتى قطرها ا م ب وكانت ∠ حـ ا ب = ∠ ى ب ا فبرهن على ان الوتر ا حـ = الوتر ب ى



(شكل ١١٧)

(البرهان) نرسم من المركز م المستقيم م هـ عموداً على ا حـ وكذا المستقيم م و عموداً على ب ى فيحدث المثلثان ا م هـ ، ب م و ثم نقول فى هذين المثلثين القائمى الزاوية

من حيث ان { م ا = م ب لانهما نصفا قطرين ، ∠ هـ ا م = ∠ و ب م بالفرض }

يتساوى المثلثان (نتيجة نظرية ٢٠)

و ينتج من تساويهما ان ا هـ = ب و

ولكن ا هـ = نصف ا حـ ، ب و = نصف ب ى

(نظرية ٥٠)

اذن ا حـ = ب ء (وهو المطلوب)

(٢) اذا علمت دائرتان متساويتان ورسم مستقيم يوازى المستقيم الذى يصل مركزيهما فبرهن على ان الوترين الحاصلين فى الدائرتين متساويان

(٣) اذا علمت دائرتان متساويتان ورسم مستقيم من منتصف المستقيم الذى يصل مركزيهما بحيث يقطعهما فبرهن على ان الوترين الحاصلين متساويان

(٤) اذا تقاطع وتران فى دائرة وكان المستقيم الذى يصل نقطة تقاطعهما بالمركز منصفاً للزاوية المحصورة بينهما كان هذان الوتران متساويين

(٥) اذا قطع مستقيم دائرتين متقاطعتين وكان موازياً لوترهما المشترك فان جزأى القاطع المحصورين بين محيطى الدائرتين متساويان

(٦) اذا تقاطعت دائرتان فاى مستقيمين متوازيين يمران بنقطتى تقاطعهما وينتهيان بالمحيطين يكونان متساويين

(٧) المستقيم الذى يصل منتصفى وترين متوازيين فى دائرة يمر بمركزها

الباب الثالث

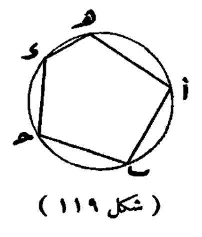
فى التماس

١ — المستقيم الذى يقطع محيط الدائرة فى نقطتين يقال له قاطع مثل ا ب (شكل ١١٨) فانه يقطع محيط الدائرة فى النقطتين حـ ، ى

٢ — اذا اشترك مستقيم مع محيط الدائرة فى نقطة واحدة يقال له مماس للدائرة مثل هـ و شكل (١١٨) فانه لا يشترك مع محيط الدائرة الا فى نقطة ن وفى هذه الحالة يقال ان المستقيم هـ و يمس الدائرة فى نقطة ن وان نقطة ن نقطة التماس

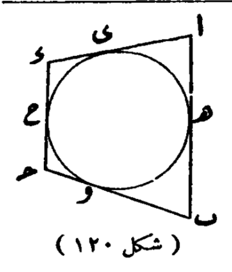
(شكل ١١٨)

٣ — اذا مر محيط الدائرة برءوس شكل مستقيم الاضلاع مثل ا ب حـ ى هـ (شكل ١١٩) يقال ان مستقيم الاضلاع مرسوم داخل الدائرة وان الدائرة مرسومة عليه أو خارجه



(شكل ١١٩)

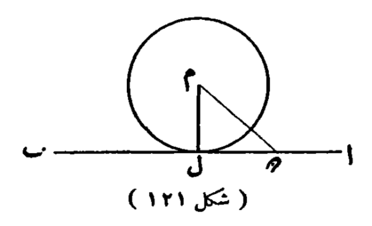
٤ — اذا مست جميع اضلاع شكل مستقيم الاضلاع محيط الدائرة مثل ا ب حـ ء (شكل ١٢٠) يقال ان مستقيم الاضلاع مرسوم خارج الدائرة وان الدائرة مرسومة داخله



(شكل ١٢٠)

« نظرية ٦٠ »

مماس الدائرة عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



(شكل ١٢١)

(المفروض) ان ا ب يمس الدائرة التي مركزها م فى نقطة ل

(المطلوب اثباته) ان م ل عمود على ا ب

(البرهان) من تعريف المماس نعلم ان نقطة التماس ل هى النقطة الواحدة التى يشترك فيها ا ب مع محيط الدائرة

فاذا أخذنا نقطة غير ل على المستقيم ا ب مثل نقطة ن كانت هذه النقطة خارجة عن محيط الدائرة

ويكون اذن م ل أصغر من م ن

كذلك يبرهن على ان م ل اصغر من اى مستقيم آخر يرسم من م الى أى نقطة أخرى على ا ب غير ل

فيكون م ل عموداً على ا ب (نظرية ١٧) وهو المطلوب

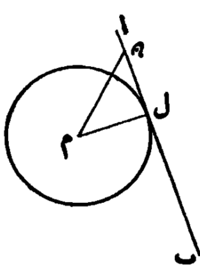
نتيجة ١ — العمود المقام من نقطة التماس على المماس يمر بمركز الدائرة .

نتيجة ٢ — العمود النازل من مركز الدائرة على المماس يمر بنقطة التماس

« نظرية ٦١ »

(وهى عكس نظرية ٦٠)

اذا رسم من نهاية نصف القطر عموداً عليه كان العمود مماساً للدائرة



(شكل ١٢٢)

(المفروض) ان م ل نصف قطر فى الدائرة التى مركزها م وان ا ب عمود على م ل فى نقطة ل

(المطلوب اثباته) ان ا ب يمس الدائرة

(البرهان) نأخذ نقطة على ا ب غير ل مثل نقطة هـ

فمن حيث ان م ل عمود على ا ب يكون م هـ مائلا بالنسبة الى ا ب

ويكون م هـ > م ل (نظرية ١٦)

و بذلك تكون نقطة هـ خارجة عن محيط الدائرة

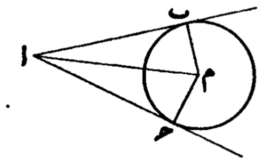
وكذا يبرهن على ان اى نقطة أخرى على ا ب غير ل تكون خارجة عن الدائرة

اذن ا ب يمس الدائرة فى نقطة ل (وهو المطلوب)

(نتيجة) من نقطة مفروضة على محيط دائرة لا يمكن ان يمد منها الا مماس واحد للدائرة

« نظرية ٦٢ »

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسان لها كان المماسان متساويين



(شكل ١٢٣)

(المفروض) ان نقطة ا خارجة عن محيط الدائرة التى مركزها م وان كلا من ا ب ، ا حـ مماس للدائرة

(المطلوب اثباته) ان ا ب = ا حـ

(البرهان) نصل م ا ، م ب ، م حـ فيحدث المثلثان م ا ب ، م ا حـ

فى هذين المثلثين

من حيث ان { م ا مشترك بين المثلثين ، م ب = م حـ لانهما نصفا قطرين ، ∠ م ب ا = ∠ م حـ ا بالقيام (نظرية ٦٠) }

يتساوى المثلثان (نظرية ٢١)

و ينتج من تساويهما أن ا ب = ا حـ وهو المطلوب

تمارين (٢١)

(١) ا ب حـ ء شكل رباعى مرسوم خارج الدائرة (شكل ١٢٠)

برهن على ان ا ب + حـ ء = ا ء + ب حـ

(البرهان) نفرض ان اضلاع الشكل الرباعى تمس محيط الدائرة فى هـ ، و ، ح ، ى

فيكون	ا هـ = ا ى	
،	ب هـ = ب و	(نظرية ٦٢)
،	حـ ح = حـ و	
،	ء ح = ء ى	

و بالجمع يكون

ا هـ + ب هـ + حـ ح + ء ح = ب و + حـ و + ا ى + ء ى

أى ان ا ب + حـ ى = ب حـ + ا ى وهو المطلوب

(٢) اذا فرضت نقطة خارج دائرة مثل ا ورسم منهـا مماسان لمحيطها مثل ا ب ، ا حـ (شكل ١٢٣)

فبرهن على ان ∠ ب ا م = ∠ حـ ا م

(٣) اذ فرضت دائرتان متحدتان فى المركز ورسمت جملة اوتار فى الدائرة الخارجة تمس الدائرة الداخلة فبرهن على ان هذه الاوتار متساوية وان نقطة تماس كل وتر تنصفه

(٤) اذا رسم متوازى اضلاع خارج الدائرة فبرهن على انه معين

(٥) ا ب حـ ى هـ و شكل مستقيم الاضلاع مرسوم خارج الدائرة برهن على أن ا ب + حـ ى + هـ و = ب حـ + ى هـ + و ا

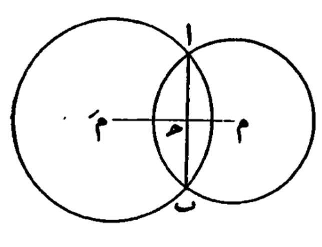
(٦) اذا فرضت دائرة مركزها م ورسم لهـا مماسان متوازيان وتلاقى هذا المماسان مع مماس ثالث للدائرة فى س ، ص فبرهن على ان زاوية س م ص قائمة

(٧) فى شكل ١٢٠ اذا فرض ان م مركز الدائرة فبرهن على أن ∠ ا م ب + ∠ حـ م ى = ٢ ق

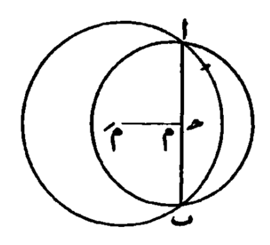
(٨) فى شكل ١٢٣ اذا وصل من ب الى حـ فبرهن على أن زاوية ا ب حـ = زاوية ا حـ ب

« نظرية ٦٣ »

اذا تقاطع محيطا دائرتين كان خط مركزيهما عموداً على وترهما المشترك ومنصفا له



(شكل ١٢٥)



(شكل ١٢٤)

(المفروض) ان الدائرتين اللتين مركزاهما م ، م َ تتقاطعان فى نقطتى ا ، ب

(المطلوب اثباته) ان م م َ ينصف الوتر المشترك ا ب ويكون عموداً عليه

(البرهان) اولا — اذا كان مركزا الدائرتين فى جهة واحدة من الوتر المشترك ا ب كما فى شكل ١٢٤

فلذلك ننصف ا ب فى نقطة حـ ثم نرسم من حـ عموداً على ا ب فى جهة المركزين فمن حيث ان ا ب وتر فى كل من الدائرتين يمر العمود بكل من المركزين م ، م َ (نتيجة نظرية ٥٠)

اى ان امتداد م م َ يمر بمنتصف ا ب ويكون عموداً عليه

(وهو المطلوب)

ثانياً — اذا كان مركزا الدائرتين فى جهتين مختلفتين من الوتر المشترك ا ب كما فى شكل ١٢٥

فلذلك ننصف ا ب فى نقطة حـ ثم نرسم من نقطة حـ عمودين على ا ب احدهما فى جهة المركز م والثانى فى جهة المركز م َ

فمن حيث أن ا ب وتر فى كل من الدائرتين يمر العمود الاول بالمركز م والعمود الثانى بالمركز م´

ويكون م حـ ، م´ حـ على استقامة واحدة (نظرية ٢)

أى ان م م´ يمر بمنتصف ا ب ويكون عموداً عليه

وهو المطلوب

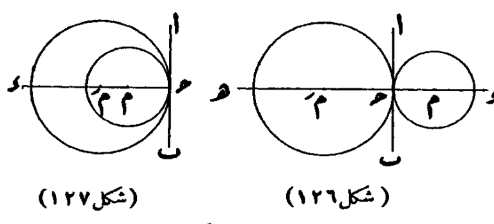
(تعريف) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطة واحدة يقال انهما متماستان مثل الدائرتين فى كل من شكلى ١٢٦ ، ١٢٧

ملاحظة ١ — اذا كانت احدى الدائرتين المتماستين خارج الدائرة الاخرى كما فى شكل ١٢٦ يقال انهما متماستان من الخارج واذا كانت احداهما داخل الاخرى كما فى شكل ١٢٧ يقال انهما متماستان من الداخل

ملاحظة ٢ — اذا تحركت احدى الدائرتين المتقاطعتين (شكل ١٢٥) حول ا بحيث تكون هذه النقطة ثابتة فان المستقيم ا ب فى حال وقوع ب على ا يمر بنقطتين متحدتين على محيطى الدائرتين المذكورتين ويكون مماسا لكل من الدائرتين وحينئذ فلكل دائرتين متماستين مماس مشترك فى نقطة تماسهما

« نظرية ٦٤ »

اذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المركزين



(شكل ١٢٦) (شكل ١٢٧)

(المفروض) ان الدائرتين اللتين مركزاهما م ، مَ متماستان فى نقطة حـ

(المطلوب اثباته) ان م مَ يمر بنقطة التماس حـ

(البرهان) اولا — عند ما تكون الدائرتان متماستين من الخارج (شكل ١٢٦)

لذلك نرسم المماس المشترك ا ب ونرسم من نقطة حـ المستقيم حـ ء عموداً على ا ب وكذا نرسم حـ هـ عموداً على ا ب

فيمر حـ ء بالمركز م
وكذا يمر حـ هـ بالمركز مَ } (نتيجة ١ نظرية ٦٠)

ويكون حـ م على استقامة حـ مَ (نظرية ٢)

أى ان م مَ يمر بنقطة التماس حـ وهو المطلوب

ثانياً — عند ما تكون الدائرتان متماستين من الداخل (شكل ١٢٧)

لذلك نرسم من حـ عموداً على المماس المشترك فى جهة المركزين مثل حـ ء

فيمر حـ ء بكل من المركزين م ، مَ كما سبق

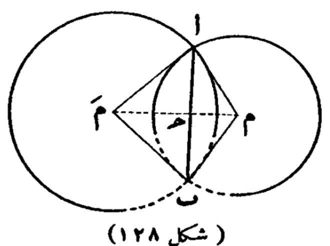
أى ان امتداد م مَ يمر بنقطة التماس حـ وهو المطلوب

(نتيجة) اذا تماست دائرتان من الخارج كان البعد بين مركزيهما

يساوى مجموع نصفى القطرين واذا تماست دائرتان من الداخل كان البعد بين مركزيهما يساوى الفرق بين نصفى القطرين

« نظرية ٦٥ »

اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطة ليست على خط مركزيهما فانهما يشتركان فى نقطة غيرها



(شكل ١٢٨)

(المفروض) ان الدائرتين اللتين مركزاهما م ، مَ تشتركان فى نقطة ا (شكل ١٢٨) وان هذه النقطة ا ليست على م مَ

(المطلوب اثباته) ان الدائرتين تشتركان فى نقطة اخرى غير ا

(البرهان) من نقطة ا ننزل العمود ا حـ على م مَ ونمده الى ب ونجعل حـ ب = حـ ا ثم نصل م ا ، م ب ، مَ ا ، مَ ب فيحدث المثلثات الاربعة م حـ ا ، م حـ ب ، مَ حـ ا ، مَ حـ ب

ثم نقول فى المثلثين م حـ ا ، م حـ ب

من حيث ان
حـ ا = حـ ب بالعمل
، م حـ مشترك بين المثلثين
، ∠ م حـ ا = ∠ م حـ ب بالقيام

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وينتج من تساويهما ان

م ب = م ا

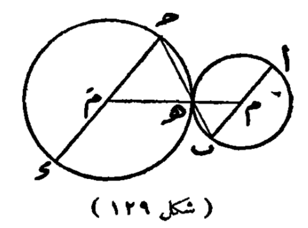
اى ان نقطة ب تقع على محيط الدائرة التى مركزها م

وباثبات تساوى المثلثين مَ حـ ا ، مَ حـ ب على النحو السابق نبرهن كذلك على ان نقطة ب تقع على محيط الدائرة التى مركزها مَ

وبذلك تشترك الدائرتان فى النقطة الثانية ب وهو المطلوب

تمارين (٢٢)

(١) اذا تماس محيطا دائرتين من الخارج فى نقطة هـ كما فى شكل (١٢٩) ورسم القطر ا ب فى الدائرة التى مركزها م يوازى القطر حـ ء فى الدائرة التى مركزها مَ فبرهن على أن ب هـ على استقامة هـ حـ



(شكل ١٢٩)

(البرهان) نصل م مَ ، ب هـ ، حـ هـ ثم نقول

م مَ يمر بنقطة التماس هـ (نظرية ٦٤)

فيحدث المثلثان المتساويا الساقين م ب هـ ، مَ حـ هـ

فيرى فى هذين المثلثين ان ∠ هـ م ب = ∠ هـ م´ حـ بالتبادل

اذن ∠ م ب هـ = ∠ م هـ ب = ∠ م´ حـ هـ + م´ هـ حـ

ولكن ∠ م ب هـ = ∠ م هـ ب
و ∠ م´ حـ هـ = ∠ م´ هـ حـ } (نظرية ٦)

اذن ٢ ∠ م هـ ب = ٢ ∠ م´ هـ حـ

أى ان ∠ م هـ ب = ∠ م´ هـ حـ

وهذا لا يتأتى الا اذا كان ب هـ على استقامة هـ حـ

وهو المطلوب

(٢) اذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين مركزاهما حـ و ى ويقطع محيط الاولى فى ا والثانية فى ب فبرهن على ان حـ ا يوازى ى ب

(٣) اذا تماس محيطا دائرتين من الخارج فى نقطة ا ورسم المستقيم ب حـ يمس احدى الدائرتين فى ب والثانية فى حـ فبرهن على أن ∠ ب ا حـ قائمة وان المماس المشترك المرسوم من ا ينصف ب حـ

(٤) اذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين متماستين من الخارج وينتهى بالمحيطين فبرهن على ان المماسين للدائرتين من طرفى هذا المستقيم متوازيان

الباب الرابع

فى الزوايا المركزية والمحيطية

تعاريف

١ — تقدم فى الباب الاول ان الزاوية المركزية هى ما كان رأسها فى مركز الدائرة وضلعاها نصفى قطرين مثل ∠ ا م ب شكل (١٠٠)

٢ — الزاوية المحيطية هى ما كان رأسها على المحيط وضلعاها وترين فى الدائرة مثل ∠ ا ه ب شكل (١٣٠)



(شكل ١٣٠)

٣ — القطعة هى جزء الدائرة المحصور بين قوس ووتر مثل القطعة ا ح ب شكل (١٣١) ويسمى الوتر أحياناً بقاعدة القطعة

٤ — الزاوية المرسومة فى قطعة هى ما كان رأسها على قوس القطعة وطرفاها منتهيين بطرفى قاعدتها

(شكل ١٣١)

فالزاوية ا ه ب شكل (١٣٠) يقال انها مرسومة فى القطعة ا ه ب لان رأسها على قوسها وضلعيها ه ا ، ه ب منتهيان بطرفى قاعدتها ا ب

٥ — وتر الدائرة الذى لا يمر بالمركز يقسمها الى جزأين غير

متساويتين يسمى أكبرهما القطعة الكبرى وأصغرهما القطعة الصغرى

٦ — القطاع هو جزء الدائرة المحصور بين قوس ونصفى قطرين مثل القطاع ء م هـ و شكل (١٣١)

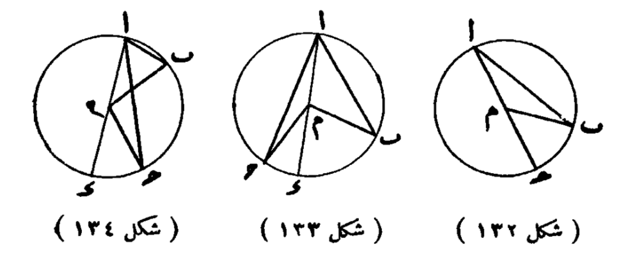
فى تقدير الزوايا المركزية

ينقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى درجة ويرمز اليه بالرمز (°) والزاوية المركزية تقاس بطول القوس المحصور بين ضلعيها منسوبا هذا الطول الى طول محيط الدائرة المرسومة فيها الزاوية أو الى طول جزء من ٣٦٠ جزءاً من المحيط (الدرجة)

فى تقدير الزوايا المحيطية

« نظرية ٦٦ »

الزاوية المحيطية تساوى نصف الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس المحصور بين ضلعيها



(شكل ١٣٢) (شكل ١٣٣) (شكل ١٣٤)

(المفروض) ان ∠ ب ا حـ محيطية وان ∠ ب م حـ الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس ب حـ

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ = ½ ∠ ب م حـ

(البرهان) لهذه النظرية ثلاث حالات

(الحالة الاولى) عند ما يكون احد ضلعى الزاوية المحيطية ماراً بالمركز مثل ∠ ب ا حـ شكل (١٣٢)

لذلك نصل م ب ثم نقول ان

∠ ب م حـ الخارجة = ∠ ب ا م + ∠ م ب ا
(نتيجة ١ نظرية ٣٦)

ولكن م ا = م ب لانهما نصفا قطرين

فتكون ∠ ب ا م = ∠ م ب ا (نظرية ٦)

اذن ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ب ا م = ٢ ∠ ب ا حـ

أى ان ∠ ب ا حـ = ½ ∠ ب م حـ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عند ما يكون مركز الدائرة بين ضلعى الزاوية المحيطية مثل ∠ ب ا حـ شكل (١٣٣)

لذلك نصل ب م ، حـ م ثم نقول أن

∠ ب ا ى = ½ ∠ ب م ى (حسب الحالة الاولى من هذه النظرية)

، ∠ ى ا حـ = ½ ∠ ى م حـ (» » » » » »)

و بالجمع يكون

∠ ب ا ى + ∠ ى ا حـ = ½ (∠ ب م ى + ∠ ى م حـ)

أى أن ∠ ب ا حـ = ½ ∠ ب م حـ وهو المطلوب

(الحالة الثالثة) عند ما يكون ضلعا الزاوية المحيطية فى جهة

واحدة من مركز الدائرة مثل ∠ ب ا حـ (شكل ١٣٤)
لذلك نصل ب م ، حـ م ثم نقول ان

∠ ى ا ب = ½ ∠ ى م ب (حسب الحالة الاولى من هذه النظرية)
، ∠ ى ا حـ = ½ ∠ ى م حـ (« « « « « «)

وبالطرح يكون

∠ ى ا ب — ∠ ى ا حـ = ½ (∠ ى م ب — ∠ ى م حـ)

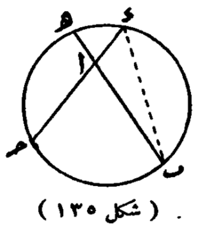
أى ان ∠ ب ا حـ = ½ ∠ ب م حـ وهو المطلوب

(ملاحظة) لسهولة تطبيق هذه النظرية فى حل المسائل والبرهنة على النظريات المتعلقة بها ينطق بها احيانا على الوجه الآتى

« الزاوية المحيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها »

« نظرية ٦٧ »

الزاوية الحادثة من تقاطع وترين داخل دائرة تقاس بنصف مجموع القوسين المحصور أحدهما بين ضلعى هذه الزاوية والثانى بين امتدادهما



(شكل ١٣٥)

(المفروض) ان الوترين ب هـ ، حـ ى متقاطعان داخل الدائرة فى نقطة ا

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا ح تقاس بنصف مجموع القوسين ب ح ، ى ه

(البرهان) نصل ب ى ثم نقول ان

∠ ب ا ح الخارجة = ∠ ا ى ب + ∠ ى ب ا

(نتيجة ١ نظرية ٣٦)

= ∠ ح ى ب + ∠ ى ب ه

ولكن ∠ ح ى ب المحيطية تقاس بنصف القوس ب ح

، ∠ ى ب ه المحيطية تقاس بنصف القوس ى ه

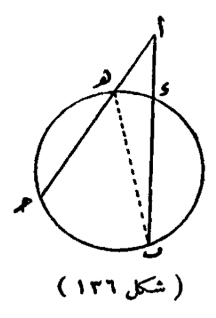
(نظرية ٦٦)

اذن ∠ ب ا ح تقاس بنصف مجموع القوسين ب ح ، ى ه

وهو المطلوب

« نظرية ٦٨ »

الزاوية الحادثة من تقاطع وترين خارج دائرة تقاس بنصف فرق القوسين المحصورين بين ضلعيها



(شكل ١٣٦)

(المفروض) ان الوترين ب ى و حـ هـ يتقاطعان خارج الدائرة فى نقطة ا وانهما يحصران بينهما القوسين ب حـ و ى هـ

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ تقاس بنصف فرق القوسين ب حـ و ى هـ

(البرهان) نصل ب هـ ثم نقول ان

∠ ب هـ حـ الخارجة = ∠ ب ا هـ + ∠ هـ ب ا

(نتيجة ١ نظرية ٣٦)

= ∠ ب ا حـ + ∠ هـ ب ى

أى ان ∠ ب ا حـ = ∠ ب هـ حـ − ∠ هـ ب ى

ولكن ∠ ب هـ حـ تقاس بنصف القوس ب حـ

و ∠ هـ ب ى تقاس بنصف القوس ى هـ (نظرية ٦٦)

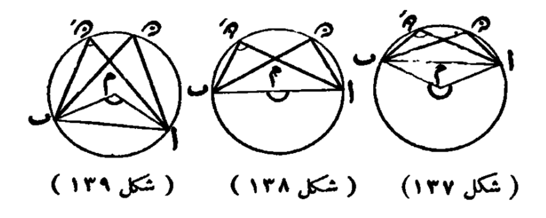
اذن ∠ ب ا حـ تقاس بنصف فرق القوسين ب حـ و ى هـ

وهو المطلوب

« نظرية ٦٩ »

الزوايا المحيطية المرسومة فى قطعة واحدة من الدائرة متساوية

(المفروض) ان الزاويتين ا ـ ب و ا ـَ ب مرسومتان فى قطعة واحدة ا ـ ـَ ب من الدائرة التى مركزها م



(شكل ١٣٧) (شكل ١٣٨) (شكل ١٣٩)

(المطلوب اثباته) ان ∠ ا ﻫ ب = ∠ ا ﻫ َ ب سواء كانت الزاويتان مرسومتين فى القطعة الصغرى كما فى شكل (١٣٧) أو كانتا مرسومتين فى نصف الدائرة كما فى شكل (١٣٨) أو كانتا مرسومتين فى القطعة الكبرى كما فى شكل (١٣٩)

(البرهان) نصل م ا ، م ب ثم نقول

ان فى كل حالة من الحالات الثلاث

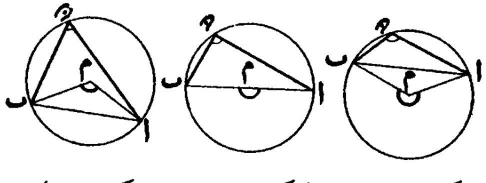
∠ ا ﻫ ب = ½ ∠ ا م ب المشتركة معها فى القوس

، ∠ ا ﻫ َ ب = ½ ∠ ا م ب « « « «

(نظرية ٦٦)

اذن ∠ ا ﻫ ب = ∠ ا ﻫ َ ب وهو المطلوب

(نتيجة) الزاوية المحيطية المرسومة فى القطعة الصغرى من الدائرة منفرجة والزاوية المرسومة فى نصف الدائرة قائمة والزاوية المرسومة فى القطعة الكبرى حادة



(شكل ١٤٠) (شكل ١٤١) (شكل ١٤٢)

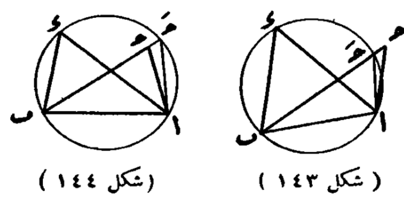
فمثلا ∠ ا ﻫ ب المرسومة فى القطعة الصغرى (شكل ١٤٠) منفرجة

، ∠ ا ﻫ ب المرسومة فى نصف الدائرة (شكل ١٤١) قائمة

، ∠ ا ﻫ ب المرسومة فى القطعة الكبرى (شكل ١٤٢) حادة

« نظرية ٧٠ »
(وهى عكس نظرية ٦٩)

الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها تكون فى قطعة واحدة هذه القاعدة قاعدة لها



(شكل ١٤٣) (شكل ١٤٤)

(المفروض) ان ∠ ا حـ ب = ∠ ا ء ب وانهما مرسومتان على قاعدة واحدة ا ب وفى جهة واحدة منها

(المطلوب اثباته) ان ا ، حـ ، ء ، ب على محيط دائرة واحدة بمعنى ان زاويتى ا حـ ب ، ا ء ب فى قطعة واحدة قاعدتها ا ب

(البرهان) لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط ا ، ب ، ء فان مر بالنقطة حـ ثبت المطلوب والا فاما ان يقطع المستقيم ب حـ بأن تكون نقطة حـ خارج الدائرة أو لا يقطعه بأن تكون نقطة حـ داخل الدائرة

فان قطع محيط الدائرة المستقيم ب حـ فى نقطة مثل حـَ كما فى (شكل ١٤٣) نصل ا حـَ ثم نقول

∠ ا حـَ ب = ∠ ا ء ب (نظرية ٦٩)

، ∠ ا حـ ب = ∠ ا ء ب بالفرض

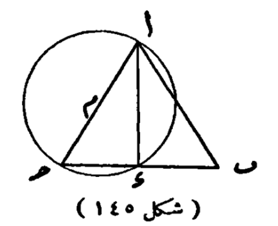
اذن ∠ ا حـَ ب = ∠ ا حـ ب

ولكن ∠ ا حـ َ ب خارجة بالنسبة للزاوية ا حـ ب الداخلة فى المثلث ا حـ َ حـ فلا يتأتى تساويهما الا اذا وقعت نقطة حـ َ على حـ وبذلك تقع ا ، حـ ، ء ، ب على محيط دائرة واحد وهو المطلوب

وان لم يقطع محيط الدائرة المار بالنقط ا ، ب ، ء المستقيم ب حـ كما فى (شكل ١٤٤) نمد ب حـ الى ان يقابل محيط الدائرة فى حـ َ ثم نصل ا حـ َ ونستمر فى البرهان كالحالة الاولى

تمارين (٢٣)

(١) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) فاذا رسمت دائرة قطرها ا حـ وكانت تقطع القاعدة ب حـ فى ء فبرهن على ان ء منتصف ب حـ



(شكل ١٤٥)

(البرهان) نصل ا ء ثم نقول

الزاوية المحيطية ا ء حـ مرسومة فى نصف دائرة وتساوى قائمة (نتيجة نظرية ٦٩)

فيكون ا ء عموداً على ب حـ

ويكون ب ء = ء حـ (خاصة المثلث المتساوى الساقين)

اى ان نقطة ى منتصف ب حـ وهو المطلوب

(٢) ا ب حـ ى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فاذا فرض ان قطريه تقاطعا فى نقطة هـ فبرهن على ان المثلثين ب حـ هـ ، ا ى هـ متساويا الزوايا

(٣) اذا رسم من نقطة هـ المفروضة خارج دائرة القاطعان هـ ا ب ، هـ حـ ى بحيث ان القاطع الاول يقطع المحيط فى نقطتى ا ، ب والقاطع الثانى يقطع المحيط فى نقطتى حـ ، ى فبرهن على ان المثلثين هـ ا ى ، هـ حـ ب متساويا الزوايا

(٤) برهن على ان محيطى الدائرتين المرسومتين على ضلعين من اضلاع المثلث باعتبارهما قطرين يتقاطعان فى نقطة على الضلع الثالث

(٥) برهن على ان الدوائر الاربعة المرسومة على اضلاع المعين الاربعة باعتبارها اقطاراً تتقاطع فى نقطة واحدة

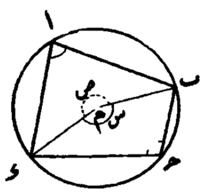
(٦) دائرتان متقاطعتان فى نقطتى ا ، ب فاذا رسم من ا القطر ا حـ فى احدى الدائرتين والقطر ا ى فى الدائرة الثانية فبرهن على أن حـ ب على استقامة ب ى

(٧) ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فاذا فرض ان منصف زاوية رأسه ا يقابل القاعدة فى ى ومحيط الدائرة فى هـ فبرهن على ان المثلثين ا ب ى ، ا هـ حـ متساويا الزوايا

(٨) ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فاذا رسم الارتفاع ا ى ليقابل القاعدة ب حـ فى ى ورسم قطر الدائرة ا هـ فبرهن على ان المثلثين ا ب ى ، ا هـ حـ متساويا الزوايا

« نظرية ٧١ »

الزاويتان المتقابلتان فى الشكل الرباعى المرسوم داخل الدائرة متكاملتـان



(شكل ١٤٦)

(المفروض) ان ا ب ح ى شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة التى مركزها م

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا ى + ∠ ب ح ى = ٢ ق

، ∠ ا ب ح + ∠ ا ى ح = ٢ ق

(البرهان) نصل م ب ، م ى ثم نقول ان

∠ ب ا ى = نصف الزاوية المركزية س التى قوسها ب ح ى

، ∠ ب ح ى = نصف الزاوية المركزية ص التى قوسها ب ا ى

وبالجمع يكون

∠ ب ا ى + ∠ ب ح ى = $\frac{1}{2}$ (∠ س + ∠ ص)

= $\frac{1}{2}$ × ٤ ق

اى ان ∠ ب ا ى + ∠ ب ح ى = ٢ ق

وكذلك نبرهن على ان

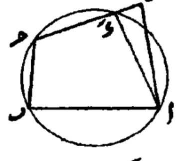
∠ ا ب ح + ∠ ا ى ح = ٢ ق

وهو المطلوب

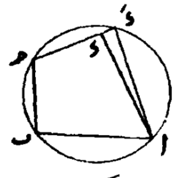
« نظرية ٧٢ »

(وهي عكس نظرية ٧١)

اذا كان فى الشكل الرباعى زاويتان متقابلتان متكاملتان كانت رءوسه على محيط دائرة واحد



(شكل ١٤٧)



(شكل ١٤٨)

(المفروض) ان ا ب حـ ء شكل رباعى فيه الزاويتان ب ، ء متكاملتان

(المطلوب اثباته) ان ا ، ب ، حـ ، ء على محيط دائرة واحد

(البرهان) لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط ا ، ب ، حـ فان مر بالنقطة ء ثبت المطلوب والا فانه اما ان يقطع الضلع حـ ء بأن تكون نقطة ء خارج الدائرة أو لايقطعه بأن تكون نقطة ء داخل الدائرة

فان قطع محيط الدائرة المستقيم حـ ء فى نقطة مثل ءَ كما فى (شكل ١٤٧) نصل ا ءَ ثم نقول

∠ ا ب حـ + ∠ ا ءَ حـ = ٢ ق (نظرية ٧١)

ولكن ∠ ا ب حـ + ∠ ا ء حـ = ٢ ق بالفرض

اذن ∠ ا ءَ حـ = ∠ ا ء حـ

ولكن ∠ ا ءَ حـ خارجة بالنسبة للزاوية ا ء حـ الداخلة فى

المثلث ا ء´ ء فلا يتأتى تساويهما الا اذا وقعت نقطة ء´ على ء وبذلك تقع ا ، ب ، حـ ، ء على محيط دائرة واحد

وهو المطلوب

وان لم يقطع محيط الدائرة المار بالنقط ا ، ب ، حـ المستقيم حـ ء كما فى (شكل ١٤٨) نمد حـ ء الى أن يقابل محيط الدائرة فى ء´ ثم نصل ا ء´ ونستمر فى البرهان كما تقدم

تمارين (٢٤)

(١) ا ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فاذا مد ضلعه ا ب الى هـ فبرهن على ان ∠ هـ ب حـ الخارجة تساوى ∠ ا ء حـ الداخلة

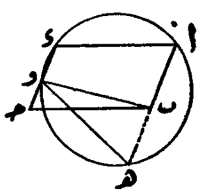
(٢) اذا امكن رسم متوازى الاضلاع داخل دائرة كان متوازى الاضلاع هذا مستطيلا

(٣) اذا امكن رسم شبه المنحرف داخل دائرة كان شبه المنحرف هذا متساوى الساقين

(٤) ا ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فاذا مد ا ب ، ء حـ الى ان يتلاقيا فى نقطة هـ فبرهن على ان المثلثين هـ ا ء ، هـ ب حـ متساويا الزوايا

(٥) ب هـ ، حـ و الارتفاعان النازلان من ب ، حـ فى المثلث ا ب حـ فاذا فرض ان م ملتقى الارتفاعين فبرهن على ان النقط الاربع ا ، و ، م ، هـ على محيط دائرة واحد .

(٦) ا ب حـ ء متوازى اضلاع فاذا رسمت دائرة تمر بنقطتى ا ، ء وتقطع ء حـ فى و وامتداد ا ب فى هـ (شكل ١٤٩) فبرهن على ان النقط الاربع ب ، حـ ، هـ ، و على محيط دائرة واحد



(شكل ١٤٩)

(البرهان) ا هـ و ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

فتكون ∠ هـ + ∠ ء = ٢ ق

ولكن ∠ حـ + ∠ ء = ٢ ق (نظرية ٢٨)

اذن ∠ هـ = ∠ حـ

اى ان ∠ ب هـ و = ∠ ب حـ و

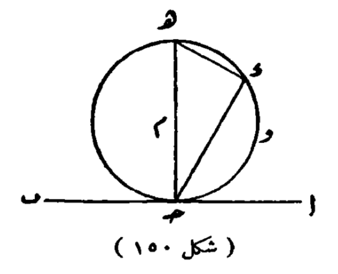
وينتج من ذلك ان النقط الاربع ب ، حـ ، هـ ، و على محيط دائرة واحد (نظرية ٧٠) وهو المطلوب

(٧) اثبت المسألة السابقة فى حالة ما يقطع محيط الدائرة امتداد كل من ا ب ، ء حـ

(٨) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فاذا رسم المستقيم س ص يوازى قاعدته ب حـ ويقطع ساقيه فى س ، ص فبرهن على ان النقط الاربع ب ، حـ ، س ، ص على محيط دائرة واحد

« نظرية ٧٣ »

الزاوية التى رأسها على محيط الدائرة وأحد ضلعيها وتر والثانى مماس للدائرة تساوى الزاوية المحيطية المرسومة فى القطعة المتبادلة



(شكل ١٥٠)

(المفروض) ان ا حـ ى زاوية رأسها على محيط الدائرة وضلعها حـ ى وتر مرسوم فيها وضلعها حـ ا يمسها فى حـ

(المطلوب اثباته)

ان ∠ ا حـ ى = الزاوية المرسومة فى القطعة حـ هـ ى

وان ∠ ب حـ ى = الزاوية المرسومة فى القطعة حـ و ى

(البرهان) أولا — لذلك نرسم القطر حـ م هـ ونصل هـ ى

فتكون ∠ هـ ى حـ قائمة (نظرية ٦٩)

وتكون ∠ ى هـ حـ + ∠ ى حـ هـ = قائمة

ولكن ∠ ا حـ م = قائمة (نظرية ٦٠)

اى ان ∠ ا حـ ى + ∠ ى حـ هـ = قائمة

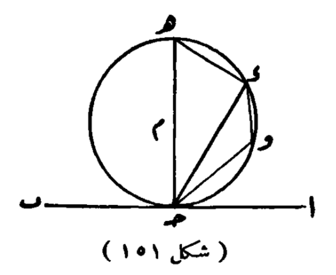
اذن ∠ ى ه حـ + ∠ ى حـ ه = ∠ ا حـ ى + ∠ ى حـ ه

وبطرح ∠ ى حـ ه المشتركة

يكون ∠ ى ه حـ = ∠ ا حـ ى المرسومة فى القطعة حـ ه ى

وهو المطلوب

ثانياً — نرسم القطر حـ م ه ونفرض نقطة و على قوس القطعة التى ليست فيها ه ثم نصل ه ى ، ى و ، و حـ (شكل ١٥١)



(شكل ١٥١)

فمن حيث ان حـ ه ى و شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

تكون ∠ حـ و ى + ∠ ى ه حـ = ٢ ق (نظرية ٧١)

ولكن ∠ ا حـ ى + ∠ ى حـ ب = ٢ ق (نظرية ١)

اذن ∠ ا حـ ى + ∠ ى حـ ب = ∠ حـ و ى + ∠ ى ه حـ

ولكن ∠ ا حـ ى = ∠ ى ه حـ على حسب ما تقدم فى الجزء الاول من هذه النظرية

اذن ∠ ى حـ ب = ∠ حـ و ى المرسومة فى القطعة ى و حـ

وهو المطلوب

تمارين (٢٥)

(١) اب وتر فى دائرة ، اح قطر لها فاذا رسم ا ء عموداً على ب ء الذى يمس الدائرة فى ب فبرهن على ان اب ينصف ∠ ء ا ح

(شكل ١٥٢)

(البرهان) ∠ ا ء ب = قائمة بالعمل

، ∠ ا ب ح = قائمة (نظرية ٦٩)

ففى المثلثين ا ء ب ، ا ب ح

تكون ∠ ا ء ب = ∠ ا ب ح لان كلا منهما تساوى قائمة

، ∠ ا ب ء = ∠ ا ح ب . (نظرية ٧٣)

اذن ∠ ء ا ب = ∠ ح ا ب

أى ان اب ينصف ∠ ء ا ح وهو المطلوب

(٢) دائرتان متماستان فى نقطة ا فاذا رسم مستقيمان يمران بها ويقطعان محيط احدى الدائرتين فى ب ، ح والاخرى فى ء ، ه فبرهن على ان ب ح يوازى ء ه

(٣) دائرتان متقاطعتان فى نقطتى س ، ص فاذا فرضت نقطة ا

على محيط احدى الدائرتين ووصل ا س ومد على استقامته الى أن قابل محيط الدائرة الثانية فى ب ووصل كذلك ا ص ومد على استقامته الى أن قابل محيط الدائرة الثانية فى حـ فبرهن على ان ب حـ يوازى المستقيم الذى يمس محيط الدائرة الاولى فى نقطة ا

(٤) ا ب حـ ى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فاذا فرض ان قطريه يتقاطعان فى نقطة هـ فبرهن على ان المستقيم الذى يمس محيط الدائرة التى تمر بالثلاث النقط ا ، ب ، هـ فى نقطة هـ يوازى حـ ى

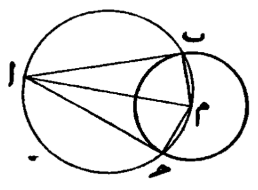
(٥) اذا رسمنا مماساً لدائرة ووتراً فيها ماراً بنقطة التماس وانزلنا عمودين من منتصف احدى قوسى الدائرة على المماس والوتر فبرهن على ان هذين العمودين متساويان

الباب الخامس

فى العمليات

« عملية ١٢ »

المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



(شكل ١٥٣)

(المفروض) ان نقطة ا خارج الدائرة التى مركزها م

(المطلوب عمله) رسم مماس من ا للمحيط

(العمل) نصل ا م ونرسم الدائرة التى قطرها م ا فهذه الدائرة تقطع الدائرة المفروضة فى نقطتى ب ، ح

فاذا وصلنا من ا الى ب ، ح كان كل من ا ب ، ا ح مماساً للدائرة

(البرهان) من حيث ان كلا من الزاويتين ا ب م ، ا ح م مرسومة فى نصف دائرة تكون كل منهما قائمة (نظرية ٦٩)

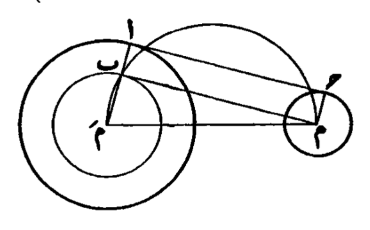
ويكون ا ب عموداً على نصف القطر م ب ، ا ح عموداً على نصف القطر م ح

اى ان ا ب ، ا ح مماسان للدائرة فى ب ، ح (نظرية ٦١)

وهو المطلوب

« عملية ١٣ »

المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين من الخارج



(شكل ١٠٤)

(المفروض) دائرتان مختلفتان متباعدتان من الخارج وان م مركز الدائرة الصغرى ، مَ مركز الدائرة الكبرى

(المطلوب عمله) رسم مماس مشترك لهاتين الدائرتين من الخارج

(العمل) نركز فى مَ وبنصف قطر يساوى الفرق بين نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نرسم من م مماساً لها وليكن م ب (عملية ١٢)

ونصل مَ ب ونمده على استقامته الى ان يقابل محيط الدائرة مَ المعلومة فى ا ثم نرسم من م نصف القطر م حـ موازياً مَ ا وفى اتجاهه ونصل حـ ا

فيكون حـ ا هو المماس المشترك المطلوب

(البرهان) من حيث ان م حـ يوازى ويساوى ب ا بالعمل يكون الشكل ا ب م حـ متوازى اضلاع (نظرية ٤٣)

ومن حيث ان المماس م ب عمود على نصف القطر مَ ب يكون

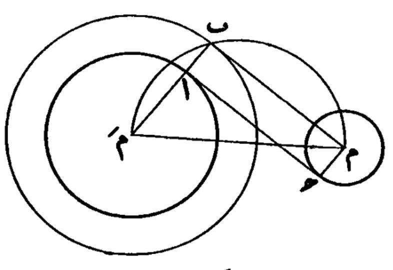
الشكل ا ب م حـ مستطيلا و يكون حـ ا عموداً على نصفى القطرين م حـ ، م َ ا

اى ان حـ ا مماس لكل من الدائرتين المعلومتين وهو المطلوب

(ملاحظة) من حيث أنه يمكن رسم مماس ثان غير م ب للدائرة التى نصف قطرها يساوى الفرق بين نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين فبالطريقة المتقدمة يمكن رسم مماس مشترك ثان للدائرتين المعلومتين من الخارج

« عملية ١٤ »

المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين من الداخل



(شكل ١٠٥)

(المفروض) دائرتان مختلفتان متباعدتان من الخارج وان م مركز الدائرة الصغرى ، م َ مركز الدائرة الكبرى

(المطلوب عمله) رسم مماس مشترك لهاتين الدائرتين من الداخل

(العمل) نركز فى م َ و بنصف قطر يساوى مجموع نصفى قطرى

الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نرسم من م مماساً لها وليكن م ب (عملية ١٢)

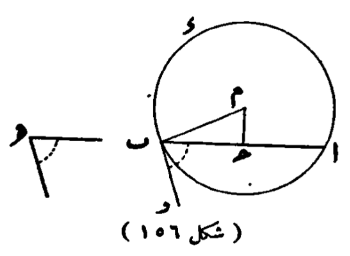
ونصل مَ ب فيقطع محيط الدائرة مَ المعلومة فى ا ثم نرسم من م نصف القطر م حـ موازياً مَ ا وفى انجاه مضاد لاتجاهه ونصل حـ ا فيكون حـ ا هو المماس المشترك المطلوب

(البرهان) نستمر فى البرهنة على صحة هذه العملية بالطريقة المتقدمة فى اثبات صحة العملية السابقة

(ملاحظة) من حيث أنه يمكن رسم مماس ثان غير م ب للدائرة التي نصف قطرها يساوى مجموع نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين فبالطريقة المتقدمة يمكن رسم مماساً مشتركا ثانياً للدائرتين المعلومتين من الداخل

« عملية ١٥ »

المطلوب رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة



(شكل ١٥٦)

(المفروض) ان ا ب مستقيم معلوم وان ∠ هـ هى الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) رسم قطعة دائرة على ا ب تقبل زاوية تساوى ∠ هـ

(العمل) نرسم من ب المستقيم ب و يصنع زاوية مع المستقيم ب ا تساوى ∠ ﻫ ونقيم من ب العمود ب م على ب و ثم ننصف ا ب فى ﺣ ونقيم منها العمود ﺣ م على ا ب ونمده حتى يقابل ب م فى م

فاذا ركزنا فى م ورسمنا دائرة بنصف قطر يساوى م ب فانها تمر بنقطة ا [لان م ا = م ب (مثال ٣ من المحال الهندسية)] وتكون ا ى ب هى القطعة المطلوبة

(البرهان) من حيث ان ب و عمود على نصف القطر م ب يكون ب و مماسا للدائرة فى نقطة ب (نظرية ٦١)

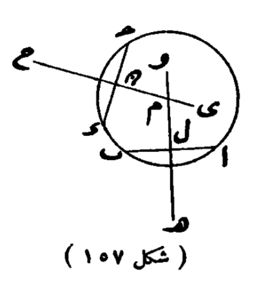
وعلى ذلك فاى زاوية مرسومة فى القطعة ا ى ب تساوى زاوية و ب ا (نظرية ٧٣)

ولكن ∠ و ب ا = ∠ ﻫ المعلومة بالعمل

اذن القطعة ا ى ب تقبل الزاوية المعلومة وهو المطلوب

« عملية ١٦ »

المطلوب ايجاد مركز دائرة غير معلوم مركزها



(شكل ١٥٧)

(المفروض) دائرة غير معلوم مركزها

(المطلوب عمله) ايجاد هذا المركز

(العمل) نرسم وترين فى الدائرة أياً كانا مثل ا ب ، حـ ء ثم ننصف ا ب فى ل ونقيم هـ ل و عموداً على ا ب وكذلك ننصف حـ ء فى ھ ونقيم ع ھ ى عموداً على حـ ء

فمن حيث ان ا ب ليس على استقامة حـ ء يتقاطع العمودان فى نقطة م وتكون هى مركز الدائرة المطلوب

(البرهان) من حيث ان مركز الدائرة على بعدين متساويين من نقطتى ا ، ب يجب ان يكون هذا المركز احدى نقط العمود هـ و (المثال ٣ من المحال الهندسية)

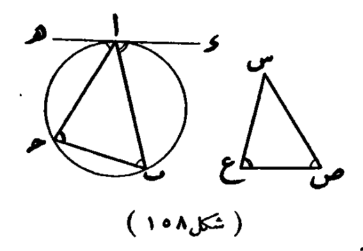
ومن حيث ان مركز الدائرة على بعدين متساويين من نقطتى حـ ، ء يجب ان يكون هذا المركز كذلك احدى نقط العمود ع ى

ومن حيث ان نقطة م (نقطة تقاطع العمودين) هى النقطة المفردة المشتركة بين العمودين هـ و ، ع ى

تكون م مركزها وهو المطلوب

« عملية ١٧ » .

المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة وزواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم



(شكل ١٥٨)

(المفروض) ان ا ب حـ الدائرة المعلومة وان س ص ع المثلث المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مثلث داخل الدائرة زواياه تساوى زوايا المثلث س ص ع

(العمل) نفرض نقطة ما مثل ا على محيط الدائرة ونرسم المماس ى ا هـ ثم نرسم من نقطة ا الوتر ا ب بحيث يصنع مع المماس ا ى الزاوية ب ا ى = ∠ ع

ونرسم من نقطة ا الوتر ا حـ بحيث يصنع مع المماس ا هـ الزاوية حـ ا هـ = ∠ ص

ثم نصل ب حـ فيكون ا ب حـ المثلث المطلوب

(البرهان) ∠ حـ = ∠ ب ا ى (نظرية ٧٣)

ولكن ∠ ع = ∠ ب ا ى (بالعمل)

اذن ∠ حـ = ∠ ع

وكذلك ∠ ب = ∠ حـ ا هـ (نظرية ٧٣)

ولكن ∠ ص = ∠ حـ ا هـ (بالعمل)

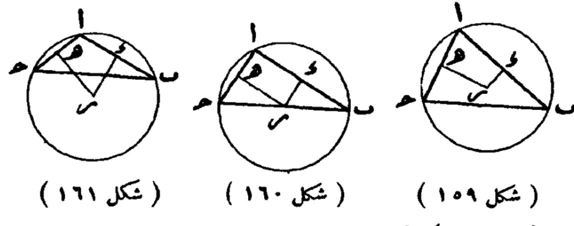
اذن ∠ ب = ∠ ص

وتكون الزاوية الثالثة س = ∠ ب ا حـ

وبذلك تكون زوايا المثلث ا ب حـ المرسوم داخل الدائرة تساوى زوايا المثلث س ص ع وهو المطلوب

« عملية ١٨ »

المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم



(شكل ١٥٩) (شكل ١٦٠) (شكل ١٦١)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث

(المطلوب عمله) رسم دائرة خارج هذا المثلث

(العمل) ننصف الضلع ا ب فى نقطة ى ونقيم ى م عموداً على ا ب ثم ننصف الضلع ا حـ فى هـ ونقيم هـ م عموداً على ا حـ فيتقابل العمودان فى م

فتكون م مركز الدائرة المطلوب رسمها خارج المثلث

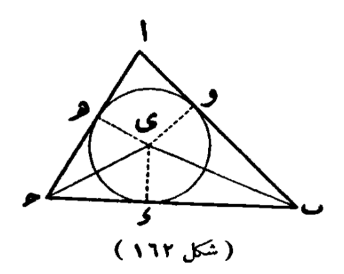
(البرهان) من حيث ان نقطة م على بعدين متساويين من ا ، ب وكذلك على بعدين متساويين من ا ، حـ على حسب ما جاء فى المثال الثالث من المحال الهندسية

تكون نقطة م على ابعاد متساوية من ا ، ب ، حـ فاذا ركز فى م ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوى م ا فانه يمر برءوس المثلث الثلاث

وتكون الدائرة ا ب حـ مرسومة خارج المثلث وهو المطلوب
(ملاحظة) نرى انه اذا كان المثلث حاد الزوايا كما فى شكل
(١٥٩) فان مركز الدائرة يقع داخله واذا كان قائم الزاوية كما فى شكل
(١٦٠) يقع المركز على وتر المثلث واذا كان منفرج الزاوية كما فى
شكل (١٦١) يقع المركز خارجاً عنه

« عملية ١٩ »

المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم



(شكل ١٦٢)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث
(المطلوب عمله) رسم دائرة داخل هذا المثلث
(العمل) ننصف كلا من ∠ ا ب حـ ، ∠ ا حـ ب بالمستقيمين
ب ى ، حـ ى المتلاقيين فى نقطة ى
فتكون ى مركز الدائرة المطلوب رسمها داخل المثلث
(البرهان) ننزل من ى الاعمدة الثلاثة ى ء ، ى هـ ، ى و
على اضلاع المثلث فمن حيث ان نقطة ى على بعدين متساويين عن

ب ا ، ب حـ وكذلك على بعدين متساويين عن حـ ا ، حـ ب على حسب ما جاء فى المثال الرابع من المحال الهندسية

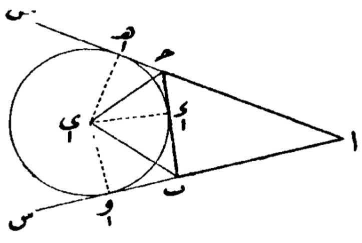
يكون ى ء = ى هـ = ى و

فاذا ركز فى ى ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوى ى ء فانه يمر بالنقط ء ، هـ ، و ويكون مماسا للاضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب (نظرية ٦١)

وتكون الدائرة ء هـ و مرسومة داخل المثلث وهو المطلوب

« عملية ٢٠ »

المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج



(شكل ١٦٣)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث

(المطلوب عمله) رسم دائرة تمس ب حـ وامتداد الضلعين ا ب ، ا حـ

(العمل) ننصف الزاويتين حـ ب س ، ب حـ ص بالمستقيمين ب ى ، حـ ى المتلاقيين فى نقطة ى فتكون ى مركز الدائرة المطلوبة

(البرهان) ننزل الاعمدة ى١ ء١ ، ى١ هـ١ ، ى١ و١ على ب حـ ، ا ص ، ا س فمن حيث ان نقطة ى١ على بعدين متساويين عن ب س ، ب حـ وكذلك على بعدين متساويين عن حـ ب ، حـ ص على حسب ما جاء فى المثال الرابع من المحال الهندسية

يكون ى١ ء١ = ى١ هـ١ = ى١ و١

فاذا ركز فى ى١ ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوى ى١ ء١ فانه يمر بالنقط ء١ ، هـ١ ، و١ ويكون مماساً للاضلاع ب حـ ، ا ص ، ا س فى ء١ ، هـ١ ، و١ (نظرية ٦١)

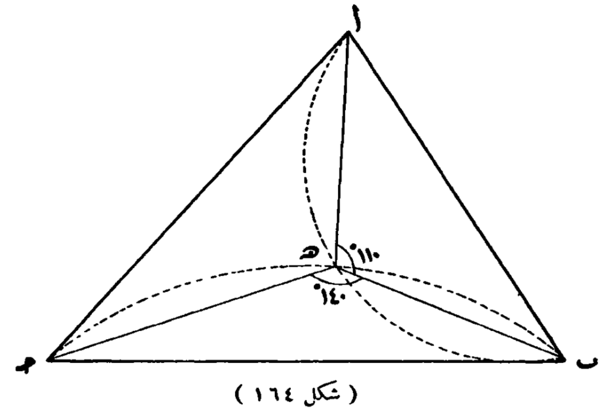
وتكون الدائرة ء١ هـ١ و١ هى التى تمس المثلث من الخارج وهو المطلوب

تمارين (٢٦)

(١) المطلوب ايجاد نقطة مثل م داخل المثلث ا ب حـ بحيث ان ∠ ا م ب = ١١٠° ، ∠ ب م حـ = ١٤٠°

(العمل) نرسم قطعة دائرة على المستقيم ا ب تقبل الزاوية ١١٠° ونرسم كذلك قطعة دائرة على ب حـ تقبل الزاوية ١٤٠° فيتقاطع المحيطان فى نقطة مثل م تكون هى النقطة المطلوبة

(البرهان) نصل م ا ، م ب ، م حـ فمن حيث ان م على



(شكل ١٦٤)

كل من القطعتين تكون ∠ ا هـ ب = ١١٠° ، ا هـ حـ = ١٤٠°
اذن هـ هى النقطة المطلوبة

(٢) المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة وزواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم

(٣) اذا رسمنا مماسين مشتركين لدائرتين فجزآهما المحصوران بين نقطتى التماس متساويان سواء كان المماسان خارجين أو داخلين

(٤) اذا رسمنا مماسين خارجين ومماسين داخلين لدائرتين متباعدتين فالداخلان يتقاطعان فى نقطة على خط المركزين وكذلك الخارجان اذا امتدا

(٥) دائرتان متماستان من الخارج فى نقطة ا رسم مماس مشترك يمسهما فى نقطتى حـ ، ى برهن على ان ∠ حـ ا ى قائمة

(٦) اذا ساوت قاعدة مثلث وزاوية رأسه نظيرتيهما من

مثلث آخر كانت الدائرتان المرسومتان خارج المثلثين متساويتين

(٧) مجموع قطرى الدائرتين المرسومة احداهما داخل مثلث قائم الزاوية والاخرى خارجه يساوى مجموع ضلعى القائمة

(٨) اذا كانت الدوائر المرسومة داخل المثلث ا ب حـ تمس اضلاعه فى ى ، هـ ، و فان زوايا المثلث ى هـ و تساوى على الترتيب

٩٠° — $\frac{ا}{٢}$ ، ٩٠° — $\frac{ب}{٢}$ ، ٩٠° — $\frac{حـ}{٢}$

(٩) اذا فرضنا ان ى مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ ، ى مركز الدائرة المماسة للضلع ب حـ وامتداد الضلعين الآخرين فانه يمكن أن يمر بالنقط ى ، ب ، ى ، حـ محيط دائرة

(١٠) المطلوب رسم مثلث على قاعدة معلومة رأسه على مستقيم معلوم وزاوية رأسه تساوى زاوية معلومة

(١١) المطلوب رسم المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية ازأس وضلع غير القاعدة

(١٢) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه الارتفاع والقاعدة وزاوية الرأس

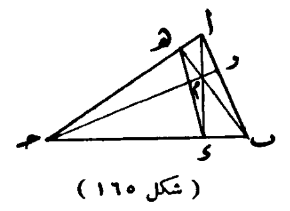
(١٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الراس ومجموع الضلعين الآخرين

(١٤) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس والفرق بين الضلمين الآخرين

(١٥) المطلوب رسم دائرة تمس مستقيمين متوازيين ومستقيما آخر قاطعا لهما مع بيان انه يمكن رسم دائرتين متساويتين فى هذه الحالة

تمارين عامة

(١) برهن على أن الاعمدة النازلة من رءوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها تتلاقى فى نقطة واحدة



(شكل ١٦٥)

(المفروض) المثلث ا ب حـ وان ا ى ، ب هـ ، حـ و هى الاعمدة النازلة من ا ، ب ، حـ على الاضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب

(المطلوب اثباته) ان هذه الارتفاعات تتلاقى فى نقطة واحدة

(البرهان) نفرض ان الارتفاعين ا ى ، ب هـ تلاقيا فى م ثم يوصل حـ م ويمد على استقامة حتى يقابل ا ب فى و ونبرهن على أن حـ و عمود على ا ب

لذلك نصل ى هـ ثم نقول

من حيث ان كلا من الزاويتين ا ى حـ ، ب هـ حـ قائمة

تكون النقط م ، ى ، حـ ، هـ على محيط دائرة واحد

(نظرية ٧٢)

وتكون ∠ ى م حـ = ∠ ى هـ حـ (نظرية ٦٩)

= ∠ ا م و بالتقابل فى الرأس

ومن حيث ان ∠ ا ى ب = ∠ ا هـ ب بالقيام

تكون النقط ا ، ﻫ ، ء ، ب على محيط دائرة واحد
(نظرية ٧٢)

وتكون ∠ ء ﻫ ب = ∠ ء ا ب (نظرية ٦٩)

أى ان ∠ ا م و + ∠ و ا م = ∠ حـ ﻫ ء + ∠ ء ﻫ ب
= ق

وتكون ∠ ا و م الثالثة = ق

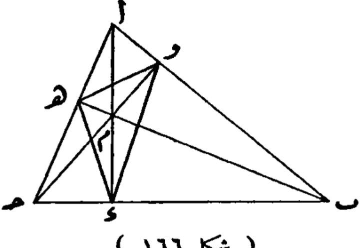
أى أن حـ و عمود على ا ب

والاعمدة ا ء ، ب ﻫ ، حـ و اذن تتلاقى فى النقطة م

وهو المطلوب

(تعريف ١) نقطة تلاقى الاعمدة النازلة من رءوس المثلث على اضلاعه تسمى ملتقى الارتفاعات

(تعريف ٢) المثلث الحادث من وصل مواقع الارتفاعات يسمى مثلث المواقع



(شكل ١٦٦)

فمثلا فى المثلث ا ب حـ (شكل ١٦٦) اذا أنزلنا الاعمدة ا ء ، ب ﻫ ، حـ ء من الرءوس المقابلة لها ووصلنا ء ﻫ ، ﻫ و ، و ء كانت نقطة م ملتقى الارتفاعات وكان المثلث ء ﻫ و مثلث المواقع

(٢) برهن على أن الاعمدة النازلة من رءوس المثلث الحـاد

الزوايا على الاضلاع المقابلة لها تنصف زوايا مثلث المواقع

(٣) برهن على أن كل ضلعين من مثلث المواقع متلاقيين على ضلع من المثلث الاصلى يصنعان مع هذا الضلع زاويتين متساويتين

(٤) برهن فى شكل (١٦٦) على أن المثلثات ء ب و ، ا ه و ، ء حـ ه ، ا ب حـ متساوية الزوايا

(٥) م ملتقى الارتفاعات فى المثلث ا ب حـ مددنا العمود ا ء حتى قابل الدائرة المرسومة خارج المثلث فى ع برهن على أن م ء = ء ع

(٦) كل من الدوائر الثلاث التى تمر برأسى مثلث وملتقى ارتفاعاته تساوى الدائرة الخارجة المارة برءوسه

(٧) ا ب حـ مثلث متساوى الاضلاع مرسوم داخل دائرة فرضت نقطة ن على القوس الصغرى ب حـ فاذا وصلت الاوتار ن ا ، ن ب ، ن حـ فبرهن على ان ن ا = ن ب + ن حـ

(٨) دائرة مركزها م رسم فيها الوتر ا ب ثم رسم القطر حـ ء عموداً على ا ب فاذا فرضت نقطة مثل ه على هذا القطر ووصل ب ه الى أن قابل محيط الدائرة فى و فبرهن على ان النقط ا ، م ، ه ، و على محيط دائرة واحد

(٩) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه نصف قطر دائرته الداخلة واحدى زاويتيه الحادتين

(١٠) اذا فرضت نقطة مثل ن داخل دائرة ورسم منها وتران متعامدان ا ن ب ، حـ ن ء فبرهن على أن القوس ا حـ + القوس ب ء = القوس حـ ب + القوس ء ا

(١١) المطلوب رسم المثلث المتساوى الساقين اذا علم منه نصف

قطر دائرته الداخلة والقاعدة

(١٢) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) ركز فى نقطة م على امتداد الضلع ا حـ ورسمت دائرة تمس الضلع ا ب فى ب فاذا مد ب حـ الى أن قابل المحيط فى ء فبرهن على أن م ء عمود على ا حـ

(١٣) اذا فرض ان ر مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ ورسم الارتفاع ا ء فبرهن على أن ∠ ب ا ء = ∠ حـ ا ر

(١٤) المطلوب ايجاد نقطة مثل ﻫ داخل المثلث ا ب حـ بحيث ان ∠ ا ﻫ ب = ∠ ب ﻫ حـ = ∠ حـ ﻫ ا

(١٥) ا ب حـ مثلث فاذا نصفت الاضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب فى س ، ص ، ع ورسم الارتفاع ا ء فبرهن على ان النقط س ، ص ، ع ، ء على محيط دائرة واحد

(١٦) برهن على ان محيط الدائرة المار بمنتصفات اضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته

(١٧) ا ب حـ مثلث نصفت اضلاعه ب حـ ، حـ ا ، ا ب فى س ، ص ، ع فاذا فرض ان م ملتقى ارتفاعاته ونصف البعد ا م فى ح فبرهن على أن النقط س ، ص ، ح ، ع على محيط دائرة واحد

(١٨) برهن على أن محيط الدائرة المار بمنتصفات اضلاع المثلث يمر بمنتصفات الابعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات ورءوس المثلث

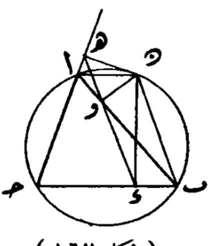
(١٩) برهن على ان محيط الدائرة المار بمنتصفات اضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته و بمنتصفات الابعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات ورءوس المثلث

(ملاحظة) بناء على هذه الخاصة تسمى الدائرة المارة بمنتصفات

اضلاع المثلث بدائرة « النقط التسع »

(٢٠) ا ب حـ مثلث ونقطة م ملتقى الارتفاعين ا ى ، ب هـ فاذا فرض ان ر مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ ووصل حـ ر الى ان قابل محيط الدائرة فى ط فبرهن على أن ط م ينصف ا ب

(٢١) ط نقطة ما فرضت على محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب حـ فاذا انزل منها الاعمدة ط ى ، ط هـ ، ط و على الاضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب فبرهن على أن ى ، هـ ، و على استقامة واحدة



(شكل ١٦٧)

(البرهان) لذلك نصل هـ و ، و ى ، ط ا ، ط ب ثم نقول
من حيث ان كلا من الزاويتين ط و ا ، ط هـ ا قائمة
تكون النقط ط ، و ، ا ، هـ على محيط دائرة واحد

وتكون ∠ ط و هـ = ∠ ط ا هـ (نظرية ٦٩)

ولكن ∠ ط ا هـ + ∠ ط ا حـ = ٢ ق (نظرية ١)

اذن ∠ ط و هـ + ∠ ط ا حـ = ٢ ق

ولكن ∠ ط ب حـ + ∠ ط ا حـ = ٢ ق (نظرية ٧١)

اذن ∠ ط و هـ = ∠ ط ب حـ

= ∠ ط ب ى

ومن حيث ان كلا من الزاويتين ه و ب ، ه ى ب قائمة
تكون النقط ه ، و ، ى ، ب على محيط دائرة واحد
وتكون ∠ ه ب ى + ∠ ه و ى = ٢ ق
اذن ∠ ه و هـ + ∠ ه و ى = ٢ ق
ويكون و ى على استقامة و هـ (نظرية ٢)
وهو المطلوب

(ملاحظة) المستقيم ى و هـ معروف « بخط سمسون »

(٢٢) دائرتان متماستان داخلا فى نقطة ا رسم الوتر ب حـ فى الدائرة الكبرى كى يمس الصغرى فى ى والمطلوب البرهنة على ان ا ى ينصف ∠ ب ا حـ

(٢٣) اذا فرضت نقطة مثل ه على محيط دائرة ورسم منها الوتر ه ا ثم رسم ه ب يمس الدائرة فى ه ورسم المستقيم ب حـ ى يوازى ه ا ويقطع الدائرة فى حـ ، ى فبرهن على أن المثلثين ه ب حـ ، ا حـ ه متساويا الزوايا

(٢٤) ا م ب زاوية فرضت على ضلعيها ا م ، ب م النقطتان حـ ، ى فاذا رسم محيط دارة يمر بالنقط ا ، م ، ى ورسم محيط دائرة ثان يمر بالنقط ب ، م ، حـ وتقاطع المحيطان فى نقطة ه فبرهن على ان المثلثين ا ه حـ ، ب ه ى متساويا الزوايا

(٢٥) دائرتان متقاطعتان فى نقطتى ا ، ب الاولى مركزها م والثانية مركزها م´ فاذا فرضت نقطة ه على محيط الدائرة التى مركزها م ووصل ه ا ، ه ب الى ان قطعا محيط الدائرة الثانية فى نقطتى س ، ص فبرهن على ان س ص عمود على ه م

القسم الثانى

المســـاحات

الباب الأول

فى مساحة الأشكال الرباعية والمثلث

تعاريف

١ — مساحة الشكل هى مقدار ما تحيط به اضلاعه من السطح

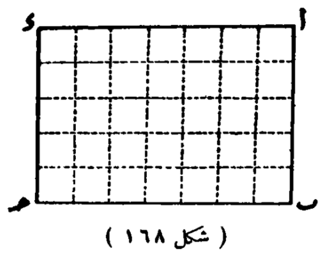
٢ — ارتفاع متوازى الاضلاع هو البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والضلع المقابل له

٣ — ارتفاع المثلث هو البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والرأس المقابل له

٤ — يقال ان الشكلين متكافئان متى كانت مساحة أحدهما تساوى مساحة الآخر

« نظرية ٧٤ »

مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب عدد الوحدات الدالة على طول قاعدته فى عدد الوحدات الدالة على طول ارتفاعه



(شكل ١٦٨)

(المفروض) ان ا ب حـ ء مستطيل قاعدته ب حـ وارتفاعه ب ا

(المطلوب اثباته) ان مساحة ا ب حـ ء = ب حـ × ب ا

(البرهان) نفرض ان طول الضلع ب حـ = ٧ سنتيمترات وطول الضلع ب ا = ٥ سنتيمترات ثم نقسم الضلع ب حـ الى ٧ أقسام متساوية ونقسم الضلع ب ا الى ٥ أقسام متساوية ونرسم من من نقط تقسيم كل منهما مستقيمات توازى الآخر

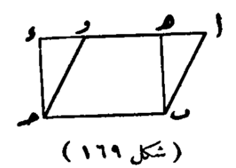
فبذلك ينقسم المستطيل الى أشكال صغيرة كل منها يساوى سنتيمتراً مربعاً واحداً

ومن حيث ان الشكل يحتوى على خمسة صفوف كل منها يحتوى على ٧ أشكال

يكون عدد ما يحتوى عليه المستطيل من السنتيمترات المربعة هو ٥×٧ أو ٣٥ سنتيمتراً مربعاً

« نظرية ٧٥ »

مساحة متوازى الاضلاع تساوى مساحة المستطيل المتحد معه فى القاعدة والارتفاع



(شكل ١٦٩)

(المفروض) ان ا ب حـ و متوازى اضلاع وان هـ ب حـ ى مستطيل متحد معه فى القاعدة ب حـ والارتفاع ب هـ بمعنى ان ب حـ يوازى ا ى

(المطلوب اثباته) ان ا ب حـ و يكافىء هـ ب حـ ى

(البرهان) فى المثلثين ا ب هـ ، و حـ ى يقال

من حيث ان
ا ب = و حـ (نظرية ٤٠)
، هـ ب = ى حـ (نظرية ٤٠)
، ∠ ا ب هـ = ∠ و حـ ى (نظرية ٣٠)

يتساوى المثلثان ا ب هـ ، و حـ ى من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وعليه فاذا اضفنا الى الشكل الرباعى هـ ب حـ و المثلث ا ب هـ كان الناتج متوازى الاضلاع ا ب حـ و

واذا اضفنا الى الشكل الرباعى هـ ب حـ و المثلث و حـ ى كان الناتج المستطيل هـ ب حـ ى

ويكون هذان الناتجان متساويين فى المساحة

أى ان متوازى الاضلاع ا ب حـ و يكافىء المستطيل هـ ب حـ ى

نتيجة ١ — مساحة متوازى الاضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

(البرهان) تقدم فى نظرية ٧٥

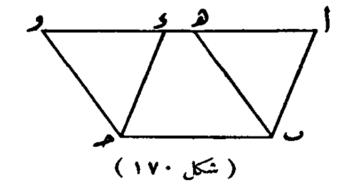
ان مساحة متوازى الاضلاع ا ب حـ و = مساحة المستطيل هـ ب حـ ى

= ب حـ × ب هـ

= القاعدة فى الارتفاع

وهو المطلوب

نتيجة ٢ — متوازيا الاضلاع المتحدان فى القاعدة والمحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان

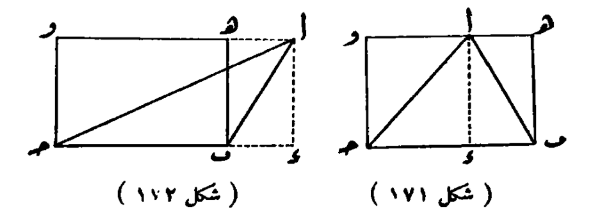


(شكل ١٧٠)

(البرهان) لان كلا من متوازيى الاضلاع ا ب حـ ى ، هـ ب حـ و يكافىء مستطيلا واحداً

« نظرية ٧٦ »

مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى الارتفاع



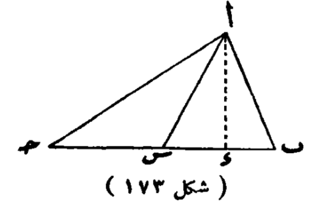
(شكل ١٧٢) (شكل ١٧١)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث قاعدته ب ح وارتفاعه ا ى
(المطلوب اثباته) ان مساحة المثلث ا ب ح = ½ ب ح × ا ى
(البرهان) نرسم فى كل من شكلى (١٧١ ، ١٧٢) ب ه ، ح و عمودين على ب ح ثم نرسم ا و موازياً ب ح ونمده فى شكل ١٧١ حتى يقابل ب ه فى ه ، ح و فى و ونقول
المثلث ا ب ى = نصف المستطيل ا ى ب ه
والمثلث ا ى ح = نصف المستطيل ا ى ح و
وبجمع المثلث الاول على الثانى فى شكل ١٧١ وطرحه منه فى شكل ١٧٢ ينتج أن
المثلث ا ب ح = نصف المستطيل ه ب ح و
= ½ ب ح × ب ه
= ½ ب ح × ا ى وهو المطلوب

(نتيجة) مساحة المثلث تساوى نصف مساحة متوازى الاضلاع المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

تمارين (٢٧)

(١) برهن على أن المستقيم المتوسط للمثلث يقسمه الى مثلثين متكافئين



(شكل ١٧٣)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث وان س منتصف القاعدة ب حـ
(المطلوب اثباته) ان △ ا ب س يكافىء △ ا س حـ
(البرهان) نرسم الارتفاع ا ى
فتكون مساحة △ ا ب س = ½ ب س × ا ى
(نظرية ٧٦)
، مساحة △ ا س حـ = ½ س حـ × ا ى
(نظرية ٧٦)
ولكن ب س = س حـ بالعمل
اذن ½ ب س × ا ى = ½ س حـ × ا ى
اى ان △ ا ب س يكافىء △ ا س حـ وهو المطلوب

(٢) برهن على أن مساحة المعين تساوى نصف حاصل ضرب قطريه

(٣) ا ب حـ ى متوازى اضلاع نصف ضلعاه ا ب ، ا ى فى س ، ص برهن على أن مساحة △ ا س ص = ⅛ مساحة متوازى الاضلاع ا ب حـ ى

(٤) ا ب حـ مثلث فرضت نقطة ى على قاعدته ب حـ بحيث كان ب ى = ⅓ ب حـ برهن على أن مساحة △ ا ب ى = ⅓ مساحة △ ا ب حـ

(٥) ارسم ثلاثة مستقيمات من رأس المثلث تقسمه الى أربعة مثلثات متكافئة

(٦) ا ب حـ مثلث فرضت نقطة ى على قاعدته ب حـ بحيث كان ب ى = ³⁄₇ ب حـ برهن على أن مساحة △ ا ب ى = ¾ مساحة △ ا حـ ى

(٧) برهن على أن قطرى متوازى الاضلاع يقسمانه الى أربعة مثلثات متكافئة

(٨) ا ب حـ مثلث والنقطة ء منتصف قاعدته ب حـ فاذا فرضت نقطة ما مثل ﮬ على المستقيم المتوسط ا ء فبرهن على أن △ ا ب ﮬ يكافىء △ ا حـ ﮬ

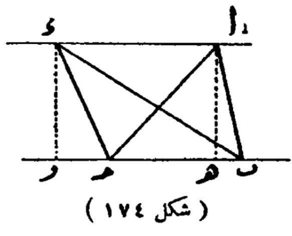
(٩) ا ب حـ ء شكل رباعى فاذا كان القطر ا حـ ينصف القطر ب ء فبرهن على أن △ ا ب حـ يكافىء △ ا ء حـ

(١٠) ا ب حـ ء شكل رباعى نصف قطره ا حـ فى ﮬ برهن على ان الشكل الرباعى ا ب ﮬ ء يكافىء الشكل الرباعى حـ ب ﮬ ء

(١١) ا ب حـ مثلث فرضت نقطة ما مثل ء على قاعدته ب حـ ثم نصف ا ء فى ﮬ برهن على أن مساحة △ ﮬ ب حـ = $\frac{1}{2}$ مساحة △ ا ب حـ

« نظرية ٧٧ »

المثلثات المتحدة فى القاعدة ورءوسها على مستقيم مواز لها متكافئة



(شكل ١٧٤)

(المفروض) ان ا ب حـ ، ء ب حـ مثلثان متحدان فى القاعدة

ب حـ وان رأسيهما ا ، ء على المستقيم ا ء الذى يوازى ب حـ

(المطلوب اثباته) ان المثلث ا ب حـ يكافىء المثلث ء ب حـ

(البرهان) نرسم الارتفاعين ا هـ ، ء و

فيكون مساحة △ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × ا هـ

ومساحة △ ء ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × ء و

ولكن ا هـ = ء و (نظرية ٤٠)

فيكون $\frac{1}{2}$ ب حـ × ا هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × ء و

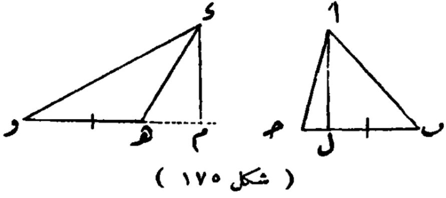
أى ان △ ا ب حـ يكافئ △ ء ب حـ وهو المطلوب

(نتيجة) المثلثات المتحدة فى القاعدة والارتفاع متكافئة

« نظرية ٧٨ »

(وهي عكس نظرية ٧٧)

المثلثات المتكافئة ذوات القواعد المتساوية تكون ارتفاعاتها متساوية



(شكل ١٧٥)

(المفروض) ان ا ب حـ ، ء هـ و مثلثان متكافئان وأن القاعدة ب حـ = هـ و

(المطلوب اثباته) ان الارتفاع ا ل = ى م

(البرهان) مساحة △ ا ب حـ = ½ ب حـ × ا ل

ومساحة △ ى هـ و = ½ هـ و × ى م

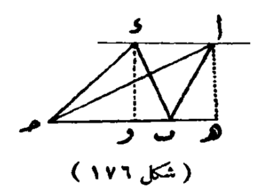
ومن حيث أن △ ا ب حـ يكافئ △ ى هـ و بالفرض

يكون ½ ب حـ × ا ل = ½ هـ و × ى م

ولكن ب حـ = هـ و بالفرض

اذن ا ل = ى م وهو المطلوب

(نتيجة) المثلثات المتكافئة المتحدة فى القاعدة والمرسومة فى جهة واحدة منها تكون رءوسها على مستقيم يوازى القاعدة

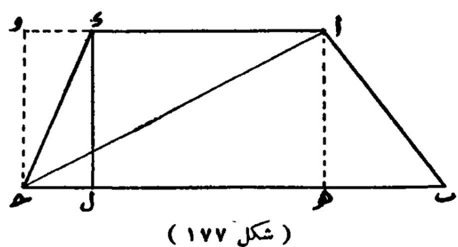


(شكل ١٧٦)

فمثلا فى شكل (١٧٦) اذا كان المثلث ا ب حـ يكافىء المثلث ى ب حـ وكانت ا ، ى فى جهة واحدة من القاعدة المشتركة بين المثلثين كان ا ى يوازى ب حـ

« نظرية ٧٩ »

مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين فى الارتفاع



(شكل ١٧٧)

(المفروض) ان ا ب حـ ى شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان ب حـ ، ا ى وارتفاعه ى ل

(المطلوب اثباته) ان مساحة ا ب حـ ى

= ½ (ب حـ + ا ى) ى ل

(البرهان) نصل القطر ا حـ ونرسم الارتفاعات ا هـ ، ى ل ، حـ و ثم نقول

مساحة △ ا ب حـ = ½ ب حـ × ا هـ

، مساحة △ ا حـ ى = ½ ا ى × حـ و

وبجمع هاتين المتساويتين بعضهما على بعض

تكون مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ى

= ½ ب حـ × ا هـ + ½ ا ى × حـ و

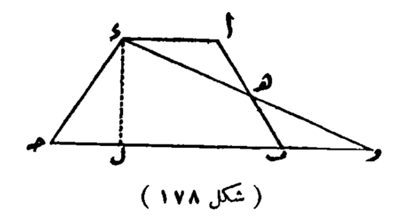
ومن حيث ان ا هـ = حـ و = ى ل (نظرية ٤٠)

تكون مساحه ا ب حـ ى = ½ ب حـ × ى ل + ½ ا ى × ى ل

= ½ ى ل (ب حـ + ى ا)

وهو المطلوب

(برهان آخر) ننصف ا ب فى هـ ونصل ى هـ ونمده الى أن يقابل حـ ب فى و ثم نقول



(شكل ١٧٨)

فى المثلثين ا هـ ء ، ب هـ و

من حيث ان { هـ ا = هـ ب
، ∠ و هـ ب = ∠ ء هـ ا بالتقابل فى الرأس
، ∠ هـ ا ء = ∠ هـ ب و بالتبادل }

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٥)

ويكون و ب = ا ء

، △ ا هـ ء يكافىء △ ب هـ و

وباضافة الشكل الرباعى ب هـ ء حـ الى كل من هذين المثلثين المتكافئين

يكون المثلث ء و حـ يكافىء شبه المنحرف ا ب حـ ء

ولكن مساحة △ ء و حـ = ½ و حـ × ء ل

= ½ (و ب + ب حـ) × ء ل

= ½ (ا ء + ب حـ) × ء ل

اذن مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ء = ½ (ا ء + ب حـ) × ء ل وهو المطلوب

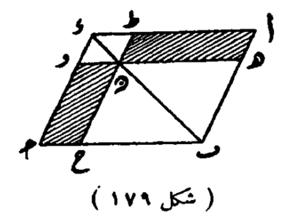
(تعريف) فى أى متوازى اضلاع مثل ا ب حـ ء (شكل ١٧٩) اذا فرضت نقطة مثل ه على احد قطريه ب ء ورسم منها المستقيم

هـ و يوازى ا ى ، ب حـ والمستقيم ط ح يوازى ا ب ، ى حـ فان الشكل ينقسم الى أربعة متوازيات اضلاع و ط ، ح هـ ، و ح ، ط هـ

ويقال ان و ط ، ح هـ مرسومان على القطر ب ى وان و ح ، ط هـ متممان لمتوازيى الاضلاع المرسومين على القطر المذكور

« نظرية ٨٠ »

متوازيا الاضلاع المتممان لمتوازيى الاضلاع المرسومين على قطر متوازى اضلاع معلوم متكافئان



(شكل ١٧٩)

(المفروض) ان ا ب حـ ى متوازى اضلاع وان ن نقطة ما على قطره ب ى وان المستقيم هـ و يوازى ا ى ، ب حـ والمستقيم ط ح يوازى ا ب ، ى حـ

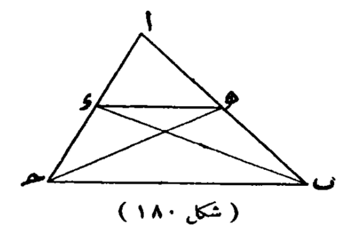
(المطلوب اثباته) ان متوازى الاضلاع هـ ط ، ح و متكافئان

(البرهان) من حيث ان قطر متوازى الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين

يكون △ ا ب ى يكافىء △ حـ ب ى
، △ هـ ب ط يكافىء △ ع ب ط
، △ ط ط ى يكافىء △ و ط ى
وبطرح كل مثلثين جزئيين من المثلث الذى يحتويهما
يكون △ ا ب ى − △ هـ ب ط − △ ط ط ى
يكافىء △ حـ ب ى − △ ع ب ط − △ و ط ى
اى ان متوازى الاضلاع هـ ط يكافىء ع و وهو المطلوب

تمارين (٢٨)

(١) برهن بواسطة المساحات على أن المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث



(شكل ١٨٠)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث وان نقطة هـ منتصف ا ب ونقطة ى منتصف ا حـ

(المطلوب اثباته) ان هـ ى يوازى ب حـ

(البرهان) نصل هـ حـ ، ى ب ثم نقول

مساحة △ ب حـ هـ = ½ مساحة △ ا ب حـ

، مساحة △ ب حـ ى = ½ مساحة △ ا ب حـ

اذن △ ب حـ هـ يكافىء △ ب حـ ى

ومن حيث ان هذين المثلثين المتكافئين قاعدتهما مشتركة وهى ب حـ

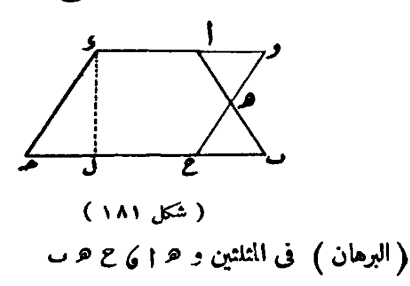
يكون هـ ى يوازى ب حـ وهو المطلوب

(٢) ا ب حـ مثلث رسم فيه المستقيم ى هـ يوازى قاعدته ب حـ بحيث يقطع الضلع ا ب فى ى والضلع ا حـ فى هـ — برهن على أن △ ا ب هـ يكافئ △ ا حـ ى

(٣) اذا تقاطع المستقيمان س حـ ، ص ب فى ط وكان △ س ط ب يكافىء △ ص ط حـ فبرهن على أن س ص يوازى ب حـ

(٤) ب ا حـ زاوية فرض على ضلعها ا ب نقطة ى وفرض على ضلعها ا حـ نقطة هـ فاذا كان △ ا هـ ب يكافىء △ ا ى حـ فبرهن على أن ى هـ يوازى ب حـ

(٥) ا ب حـ ى شبه منحرف (شكل ١٨١) نصف ضلعه ا ب فى نقطة هـ ورسم منها و ع يوازى ى حـ برهن على أن شبه المنحرف ا ب حـ ى يكافىء متوازى الاضلاع حـ ع و ى



(شكل ١٨١)

(البرهان) فى المثلثين و هـ ا ، ع هـ ب

من حيث ان
ا هـ = هـ ب بالعمل
∴ ∠ ا هـ و = ∠ ب هـ ع بالتقابل فى الرأس
∴ ∠ و ا هـ = ∠ ع ب هـ بالتبادل

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٥)

ويكون △ و هـ ا يكافىء △ ع هـ ب

∴ و ا = ب ع

وباضافة الشكل ذى خمسة الاضلاع ا هـ ع حـ ى الى كل من المثلثين المتكافئين يكون شبه المنحرف ا ب حـ مكافئاً متوازى الاضلاع حـ ع و ى وهو المطلوب

(٦) فى التمرين السابق برهن على ان و ى = $\frac{1}{2}$ (ا ى + ب حـ)

(البرهان) و ى = ع حـ (نظرية ٤٠)

ولكن و ى = ا ى + و ا

∴ ع حـ = ب حـ − ب ع

وبالجمع يكون

ى ى + ع حـ = ا ى + و ا + ب حـ − ب ع

أى ان ٢ و ى = ا هـ + ب حـ

∴ و ى = $\frac{1}{2}$ (ا ى + ب حـ) وهو المطلوب

(ملاحظة) من حيث ان شبه المنحرف ا ب حـ ى يكافىء متوازى الاضلاع حـ ع و ى

تكون مساحة ا ب حـ ى = و ى × ى ل

= $\frac{1}{2}$ (ا ى + ب حـ) × ى ل

وقد سبقت البرهنة على هذه الخاصة بطريقتين أخريين (راجع نظرية ٧٩)

(٧) برهن على ان المستقيم الواصل منتصفى ضلعى شبه المنحرف غير المتوازيين يوازى قاعدتيه المتوازيتين

(٨) ا ب حـ ء متوازى اضلاع فرضت نقطة مثل ه على قطره ا حـ برهن على ان △ ا ء ه يكافىء △ ا ب ه و △ حـ ء ه يكافىء حـ ب ه

(٩) ا ب حـ ء متوازى اضلاع نصف ضلعه ا ء فى نقطة س وضلعه ب حـ فى نقطة ص فاذا اخذت نقطة مثل ه على س ص أو على امتداده فبرهن على ان مساحة △ ا ه ب = ¼ مساحة متوازى الاضلاع ا ب حـ ء

(١٠) ا ب حـ ء متوازى اضلاع فرضت نقطة س على ضلعه ا ء ونقطة ص على ضلعه ء حـ برهن على ان △ ب س حـ يكافىء △ ا ص ب

(١١) ا ب حـ ء شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان ا ب و ء حـ فاذا نصف ضلعه ا ء فى هـ فبرهن على ان مساحة △ ب هـ حـ تساوى ½ مساحة ا ب حـ ء

(١٢) ا ب حـ ء متوازى اضلاع فرضت نقطة ما مثل ه داخله برهن على ان مجموع مساحتي المثلثين ه ا ب و ه حـ ء يساوى نصف مساحة متوازى الاضلاع

الباب الثانى

فى الاستدلال الهندسى لبعض متطابقات جبرية

يوجد بعض متطابقات جبرية يمكن اثبات صحتها بالطرق الهندسية فضلا عن الطرق الجبريه ولها ارتباط عظيم بالنظريات الهندسية

(تعريف) اذا فرضت نقطة على مستقيم معلوم قيل انها تقسمه من الداخل واذا فرضت على امتداده قيل انها تقسمه من الخارج

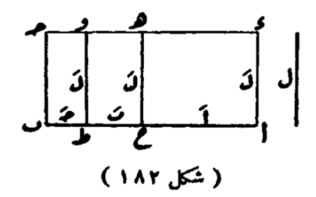
ملاحظة — يقال للبعدين اللذين بين نقطة التقسيم وطرفى المستقيم جزءا المستقيم واذا كان الانقسام من الداخل فالمستقيم المعلوم يساوى مجموع جزأى التقسيم واذا كان الانقسام من الخارج فالمستقيم يساوى الفرق بين جزأى التقسيم

« متطابقة ١ »

الاثبات الهندسى للمتطابقة الجبرية

ل َ (ا َ + ب َ + حـ َ + ...)

= ل َ ا َ + ل َ ب َ + ل َ حـ َ + ...



(شكل ١٨٢)

(العمل) نفرض المستقيم ا ب وتقسمه الى الاجزاء ا ع ، ع ط ، ط ب المرموز اليها بالرموز ا َ ، ب َ ، حـ َ ثم نقيم من ا المستقيم ا ء عموداً على ا ب ومساوياً ل ونرسم من ء المستقيم ء حـ موازياً ا ب ثم نمد من ع ، ط ، ب المستقيمات حـ هـ ، ط و ، ب حـ موازية ا ء ونرمز الى كل منها بالرمز ل َ

(البرهان)

المستطيل ا حـ = المستطيل ا هـ + المستطيل ع و + المستطيل ط حـ

ولكن المستطيل ا حـ = ل × ا ب من الوحدات المربعة

= ل َ (ا َ + ب َ + حـ َ) من الوحدات المربعة

والمستطيل ا هـ = ء ا × ا ع من الوحدات المربعة

= ل َ ا َ » » »

والمستطيل ع و = هـ ع × ع ط » » »

= ل َ ب َ » » »

والمستطيل ط حـ = و ط × ط ب » » »

= ل َ حـ َ

أى ان

ل َ (ا َ + ب َ + حـ َ) = ل َ ا َ + ل َ ب َ + ل َ حـ َ

وبالمثل نبرهن على ان

ل َ (ا َ + ب َ + حـ َ + ...)

= ل َ ا َ + ل َ ب َ + ل َ حـ َ + ...

« متطابقة ٢ »

الاثبات الهندسي للمتطابقة الجبرية

$$(ا' + ب')^٢ = ا'^٢ + ٢ ا' ب' + ب'^٢$$

(شكل ١٨٣)

(العمل) نفرض المستقيم ا ب ونقسمه من الداخل الى الجزأين ا هـ ، هـ ب المرموز اليهما بالرمزين ا' ، ب' ثم ننشىء على ا ب المربع ا ب حـ ء ونأخذ على ب حـ البعد ب ص مساوياً ا هـ أى مساوياً ا' فيكون ص حـ = ب' ثم نمد من هـ المستقيم هـ و موازياً ا ء ومن ص المستقيم ص س موازياً ا ب وقاطعاً هـ و فى ع

(البرهان) المربع ا حـ =

المربع ا ع + المستطيل س و + المستطيل هـ ص + المربع ع حـ

ولكن المربع ا حـ $= (ا' + ب')^٢$ من الوحدات المربعة

والمربع ا ع $= ا'^٢$ » » »

والمستطيل س و $= ا' ب'$ » » »

والمستطيل هـ ص $= ا' ب'$ » » »

والمربع ع حـ $= ب'^٢$ » » »

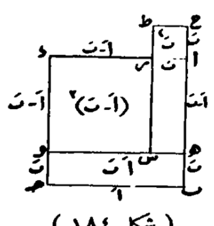
أى ان $(ا' + ب')^٢ = ا'^٢ + ٢ ا' ب' + ب'^٢$

وهو المطلوب

« متطابقة ٣ »

الاثبات الهندسى للمتطابقة الجبرية

$$(ا' - ب')^٢ = ا'^٢ + ب'^٢ - ٢ ا' ب'$$



(شكل ١٨٤)

(العمل) نفرض المستقيم ا ى ونقسمه من الداخل فى النقطة ر ثم نرمز الى ا ى بالرمز ا' والى ا ر بالرمز ب' فيكون ر ى = ا' — ب' ثم ننشىء على ر ى المربع ر ى و س ونمد و س الى ان يقابل ا ب فى هـ فيكون ب هـ = ب'

ثم نمد هـ ا الى حـ بحيث يكون هـ حـ = ا' فيكون ا حـ = ب' وننشىء على ا حـ المربع ا حـ ط ر

(البرهان) المربع ر و =

المربع ا حـ + المربع ح ر — المستطيل ح س — المستطيل هـ حـ

ولكن المربع ر و = (ا' — ب')^٢ من الوحدات المربعة

والمربع	ا حـ = ا'^٢	»	»	»
والمربع	ح ر = ب'^٢	»	»	»
والمستطيل	ح س = ا' ب'	»	»	»
والمستطيل	هـ حـ = ا' ب'	»	»	»

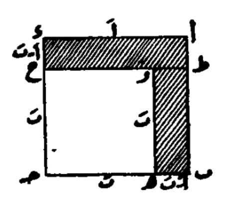
أى ان (ا َ ــ ب َ)^٢ = ا َ^{٢} + ب َ^{٢} ــ ٢ ا َ ب َ

وهو المطلوب

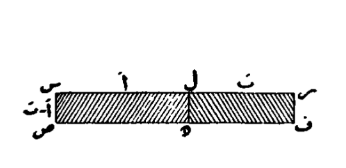
« متطابقة ٤ »

الاثبات الهندسى للمتطابقة الجبرية

ا َ^{٢} ــ ب َ^{٢} = (ا َ + ب َ) (ا َ ــ ب َ)



(شكل ١٨٥)



(شكل ١٨٦)

(العمل) نفرض المستقيم ا ء ونرمز اليه بالرمز ا َ وننشئ عليه المربع ا حـ ثم نأخذ البعد حـ ع = ب َ وننشئ عليه المربع ع حـ و هـ فيكون ع ء = هـ ب = ا َ ــ ب َ

(البرهان)

المربع ا حـ ــ المربع و حـ = المستطيل ا ع + المستطيل ط هـ

وبوضع المستطيلين ا ع ، ط هـ احدهما بجانب الآخر كما هو مبين بشكل (١٨٦)

يكون المستطيل ا ع + المستطيل ط هـ = المستطيل ر ص

أى ان المربع ا حـ ــ المربع و حـ = المستطيل ر ص

ولكن المربع ا حـ = ا َ^{٢} من الوحدات المربعة

والمربع و حـ = ب َ^{٢} » » »

والمستطيل س ص = (ا′ + ب′)(ا′ − ب′) من الوحدات المربعة

أى أن ا′^{2} − ب′^{2} = (ا′ + ب′)(ا′ − ب′)

وهو المطلوب

(نتيجة) اذا نصف مستقيم وقسم الى جزأين غير متساويين من الداخل او من الخارج كان المستطيل المكون من الجزأين غير المتساويين مكافئاً للفرق بين المربعين المنشأ أحدهما على نصف المستقيم والآخر على البعد المحصور بين نقطتى التقسيم

(الحالة الاولى) عند ما تكون نقطة الانقسام من الداخل

ا هـ م ب

(شكل ١٨٧)

(المفروض) ان ا ب مستقيم محدود (شكل ١٨٧) وان م منتصفه وان هـ نقطة ما داخله

(المطلوب اثباته) ان ا هـ × هـ ب = $\overline{\text{م ب}}^{2}$ − $\overline{\text{م هـ}}^{2}$

(البرهان) ا هـ × هـ م = (ا م − هـ م)(ب م + هـ م)

= (ب م − هـ م)(ب م + هـ م)

= $\overline{\text{ب م}}^{2}$ − $\overline{\text{هـ م}}^{2}$

وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عند ما تكون نقطة الانقسام من الخارج

هـ ا م ب

(شكل ١٨٨)

(المفروض) ان ا ب مستقيم محدود (شكل ١٨٨) وان م منتصفه وان ه نقطة ما خارجه

(المطلوب اثباته) ان $\text{ه ا} \times \text{ه ب} = \overline{\text{ه م}}^2 - \overline{\text{م ب}}^2$

(البرهان) $\text{ه ا} \times \text{ه ب} = (\text{ه م} - \text{ا م})(\text{ه م} + \text{م ب})$

$= (\text{ه م} - \text{م ب})(\text{ه م} + \text{م ب})$

$= \overline{\text{ه م}}^2 - \overline{\text{م ب}}^2$ وهو المطلوب

تمارين (٢٩)

(١) برهن بالطرق الهندسية على أن المتطابقتين الجبريتين الآتيتين صحيحتان

$(\text{ا} + \text{ب} + \text{ح})^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ح}^2 + ٢\,\text{ب ح}$
$+ ٢\,\text{ح ا} + ٢\,\text{ا ب}$

$(\text{ا} + \text{ب})(\text{ح} + \text{ى}) = \text{ا ح} + \text{ا ى} + \text{ب ح} + \text{ب ى}$

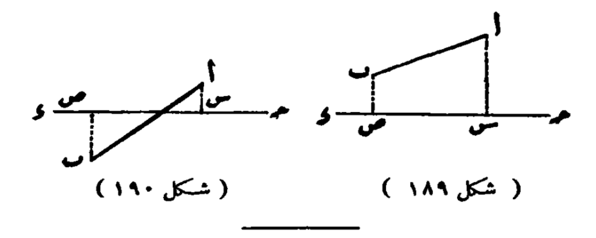
(٢) اذا قسم مستقيم معلوم الى جزأين كان المربع المنشأ على هذا المستقيم المعلوم مكافئاً مجموع المستطيلين المكون أحدهما من المستقيم المعلوم واحد الجزأين والثانى من المستقيم المعلوم والجزء الآخر

(٣) اذا قسم مستقيم معلوم الى جزأين كان المستطيل المكون من المستقيم المعلوم وأحد الجزأين مكافئاً المربع المنشأ على هذا الجزء مضافاً اليه المستطيل المكون من الجزأين

الباب الثالث

فى المربعات المنشأة على اضلاع المثلث

(تعريف) اذا انزلنا من نهايتى مستقيم معلوم مثل ا ب العمودين ا س ، ب ص على مستقيم آخر مثل حـ ى فانه يقال للنقطتين س،ص مسقطا ا ، ب على حـ ى . ويقال للمستقيم س ص مسقط ا ب على حـ ى سواء تقاطع ا ب ، حـ ى كما فى شكل (١٩٠) أو لم يتقاطعا كما فى شكل (١٨٩)

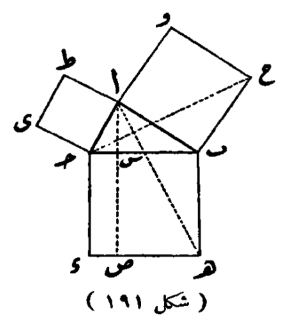


(شكل ١٨٩) (شكل ١٩٠)

« نظرية ٨١ »

(الملقبة بنظرية فيثاغورس)

المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على ضلعى القائمة



(شكل ١٩١)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ا وان ب حـ ء هـ المربع المنشأ على الوتر ب حـ ٬ ا ب ع و المربع المنشأ على ب ا وان ا حـ ى ط المربع المنشأ على حـ ا

(المطلوب اثباته) ان مساحة المربع ب ء تساوى مجموع مساحتى المربعين ب و ٬ حـ ط

(البرهان) نرسم ا س ص يوازى ب هـ ٬ حـ ء ونصل حـ ع ٬ ا هـ ثم نقول

فى المثلثين ع ب حـ ٬ ا ب هـ

من حيث ان ⎫ ع ب = ب ا
٬ ب حـ = ب هـ
٬ ∠ ع ب حـ = ∠ ا ب هـ (لان كلا منهما = ∠ ا ب حـ + ق)

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون △ ع ب حـ يكافىء △ ا ب هـ

ولكن △ ع ب حـ يكافىء نصف المربع ب و لانه متحد

معه فى القاعدة ح ب ومحصور معه بين المتوازيين ح ب ، و حـ

وكذلك △ ا ب حـ يكافىء نصف المستطيل ب ص لانه متحد معه فى القاعدة ب هـ ومحصور معه بين المتوازيين ب هـ ، ا ص

اذن المربع ب و يكافىء المستطيل ب ص

وكذلك اذا وصلنا ب ى ، ا ء نبرهن على ان المربع حـ ط يكافىء المستطيل حـ ص

اذن المستطيل ب ص + المستطيل حـ ص = مجموع المربعين ب و ، حـ ط

اى ان المربع ب ء = مجموع المربعين ب و ، حـ ط

وبعبارة اخرى $\overline{\text{ب حـ}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا حـ}}^2$ وهو المطلوب

(نتيجة) فى المثلث القائم الزاوية المربع المنشأ على احد ضلعى القائمة يكافىء المستطيل المكون من الوتر ومسقط الضلع على هذا الوتر

فمثلا فى المثلث ا ب حـ شكل (١٩١)

$\overline{\text{ا ب}}^2 = \text{ب حـ} \times \text{ب س}$

، $\overline{\text{ا حـ}}^2 = \text{ب حـ} \times \text{حـ س}$

(البرهان) فى النظرية السابقة قد ثبت ان

المربع ب و يكافىء المستطيل ب ص

اى ان $\overline{\text{ا ب}}^2 = \text{هـ ب} \times \text{ب س}$

$= \text{ب حـ} \times \text{ب س}$ وهو المطلوب

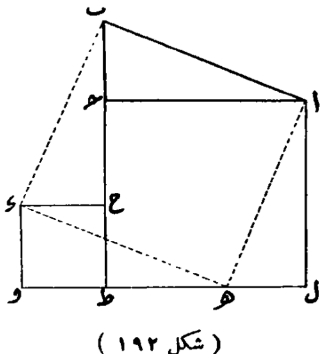
وكذا المربع حـ ط يكافىء المستطيل حـ ص

اى ان $\overline{\text{ا حـ}}^{٢}$ = ء حـ × حـ س

= ب حـ × حـ س وهو المطلوب

(برهان ثان لنظرية فيثاغورس)

نرسم المربعين المختلفين ا ل ط حـ ، ح ط و ء احدهما بجانب الآخر كما فى شكل (١٩٢) ثم نمد ح حـ على استقامته الى ب بحيث



(شكل ١٩٢)

ان حـ ب = ط ح ونصل ا ب فيكون ا حـ ب مثلثاً قائم الزاوية فى حـ والمربعان ا ط ، ح و هما المربعان المنشآن على ضلعى زاويته القائمة حـ

ثم ناخذ على ل ط البعد ل هـ = ط ح ونصل ا هـ ، هـ ء ، ء ب ونقول

فى المثلثات الاربعة ا حـ ب ، ب ح ء ، هـ ء و ، ا ل هـ القائمة الزوايا من حيث ان ضلعى الزاوية القائمة فى احدهما يساويان نظيريهما فى كل من الثلاثة الاخرى

تنطبق المثلثات بعضها على بعض (نظرية ٤)

ويكون ا ب = ب ى = ى هـ = هـ ا

وتكون المثلثات الاربعة متكافئة

ولكن من حيث ان ا ب = ب ى = ى هـ = هـ ا

و ∠ هـ ا ب = ∠ هـ ا حـ + ∠ حـ ا ب

= ∠ هـ ا حـ + ∠ ل ا هـ

= ق

يكون الشكل ا هـ ى ب مربعاً وهو المربع المنشأ على الوتر ا ب في المثلث ا حـ ب

وعليه فلو طرحنا المثلثين ا ل هـ و هـ و ى من الشكل الكلى لكان الباقى المربع ا هـ ى ب

ولو طرحنا المثلثين ا حـ ب و ب ع ى من الشكل الكلى لكان الباقى المربع ا ل ط حـ مضافاً اليه المربع ع ط و ى

و يكون هذان الباقيان متساويين

اى ان المربع ا هـ ى ب يكافىء مجموع المربعين ا ل ط حـ و ع ط و ى

وبعبارة اخرى يكون $\overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{ا حـ}}^{2} + \overline{\text{حـ ب}}^{2}$

وهو المطلوب

« نظرية ٨٢ »

(وهى عكس نظرية فيثاغورس)

اذا كان المربع المنشأ على أحد اضلاع مثلث يساوى مجموع

المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة

(شكل ١٩٣)

(المفروض) ان ب ا ح مثلث فيه $\overline{\text{ب ح}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢}$

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا ح قائمة

(البرهان) من نقطة ح نرسم ح ى عموداً على ا ح ونأخذ البعد ح ى = ا ب ونصل ى ا ثم نقول

في المثلث ى ح ا من حيث ان زاوية ا ح ى قائمة بالعمل

يكون $\overline{\text{ى ا}}^{٢} = \overline{\text{ح ى}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢}$

ولكن ح ى = ا ب

اذن $\overline{\text{ى ا}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢}$

ولكن $\overline{\text{ب ح}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢}$ بالفرض

اذن $\overline{\text{ب ح}}^{٢} = \overline{\text{ى ا}}^{٢}$

∴ ب ح = ى ا

ثم نقول في المثلثين ب ا ح ، ى ح ا

من حيث ان
- ب ح = ى ا بالاثبات
- ، ا ح مشترك بين المثلثين
- ، ح ى = ا ب بالعمل

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٨)

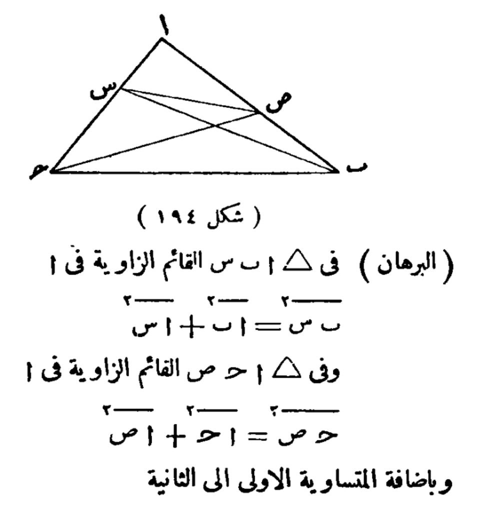
وتكون ∠ ب ا حـ = ∠ ء حـ ا

ولكن ∠ ء حـ ا = قائمة بالعمل

اذن ∠ ب ا حـ = قائمة وهو المطلوب

تمارين (٣٠)

(١) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ا رسم المستقيم س ص قاطعاً ا حـ فى س ، ا ب فى ص فاذا وصل ب س ، حـ ص فبرهن على ان $\overline{\text{ب س}}^{2} + \overline{\text{حـ ص}}^{2} = \overline{\text{ب حـ}}^{2} + \overline{\text{س ص}}^{2}$



(شكل ١٩٤)

(البرهان) فى △ ا ب س القائم الزاوية فى ا

$$\overline{\text{ب س}}^{2} = \overline{\text{ا ب}}^{2} + \overline{\text{ا س}}^{2}$$

وفى △ ا حـ ص القائم الزاوية فى ا

$$\overline{\text{حـ ص}}^{2} = \overline{\text{ا حـ}}^{2} + \overline{\text{ا ص}}^{2}$$

وباضافة المتساوية الاولى الى الثانية

يكون $\overline{\text{ب س}}^2 + \overline{\text{حـ ص}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا حـ}}^2 + \overline{\text{ا س}}^2 + \overline{\text{ا ص}}^2$

ولكن $\overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا حـ}}^2 = \overline{\text{ب حـ}}^2$ (نظرية فيثاغورس)

و $\overline{\text{ا س}}^2 + \overline{\text{ا ص}}^2 = \overline{\text{س ص}}^2$ (« «)

اذن $\overline{\text{ب س}}^2 + \overline{\text{حـ ص}}^2 = \overline{\text{ب حـ}}^2 + \overline{\text{س ص}}^2$

وهو المطلوب

(٢) ارسم مربعا يساوى مجموع مربعين معلومين

(٣) ارسم مربعاً يساوى مجموع ثلاثة مربعات معلومة

(٤) ارسم مربعاً يساوى الفرق بين مربعين معلومين

(٥) ا ب حـ مثلث رسم فيه الارتفاع ا ء والمطلوب البرهنة على أن

$$\overline{\text{ا ب}}^2 - \overline{\text{ا حـ}}^2 = \overline{\text{ب ء}}^2 - \overline{\text{حـ ء}}^2$$

(٦) برهن على ان المربع المنشأ على قطر المربع يساوى ضعف هذا المربع

(٧) كيف تقسم مستقيا الى قسمين بحيث يكون مربع احدهما ضعف مربع الآخر

(٨) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية ب فرضت نقطة مثل ء على ضلعه ب حـ والمطلوب البرهنة على أن

$$\overline{\text{ا ء}}^2 + \overline{\text{ب حـ}}^2 = \overline{\text{ا حـ}}^2 + \overline{\text{ب ء}}^2$$

(٩) ا ب حـ ء شكل رباعى قطراه متعامدان والمطلوب البرهنة على أن $\overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{حـ ء}}^2 = \overline{\text{ب حـ}}^2 + \overline{\text{ا ء}}^2$

(١٠) ا ب حـ د شكل رباعى فرضت نقطة مثل هـ داخله والمطلوب البرهنة على أن

$$\overline{\text{هـ ا}}^2 + \overline{\text{هـ حـ}}^2 = \overline{\text{هـ ب}}^2 + \overline{\text{هـ د}}^2$$

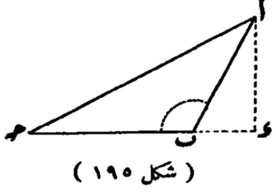
(١١) برهن على أن المربع المنشأ على العمود النازل من رأس القائمة على الوتر فى المثلث القائم الزاوية يكافىء المستطيل المكون من جزأى الوتر

(١٢) اذا فرضت نقطة هـ داخل المثلث ا ب حـ وانزل منها على اضلاعه الاعمدة هـ س على ب حـ ، هـ ص على حـ ا ، هـ ع على ا ب فبرهن على أن

$$\overline{\text{ا ع}}^2 + \overline{\text{ب س}}^2 + \overline{\text{حـ ص}}^2 = \overline{\text{ا ص}}^2 + \overline{\text{حـ س}}^2 + \overline{\text{ب ع}}^2$$

« نظرية ٨٣ »

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية المنفرجة فى المثلث المنفرج الزاوية يكافىء مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين مضافاً اليه ضعف المستطيل المكون من أحد هذين الضلعين ومسقط الآخر عليه



(شكل ١٩٥)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث منفرج الزاوية فى ب

(المطلوب اثباته)

ان $\overline{\text{ا ح}}^{2} = \overline{\text{ح ب}}^{2} + \overline{\text{ب ا}}^{2} + \text{٢ ب ح} \times \text{ب ى}$

(البرهان) نرسم من ا الارتفاع ا ى بحيث يقطع امتداد ح ب في ى ثم نقول

في △ ا ى ح القائم الزاوية في ى

$\overline{\text{ا ح}}^{2} = \overline{\text{ى ح}}^{2} + \overline{\text{ا ى}}^{2}$ (نظرية فيثاغورس)

ولكن $\overline{\text{ى ح}}^{2} = (\text{ح ب} + \text{ب ى})^{2}$

$= \overline{\text{ح ب}}^{2} + \overline{\text{ب ى}}^{2} + \text{٢ ب ح} \times \text{ب ى}$

(متطابقة ٢)

و $\overline{\text{ا ى}}^{2} = \overline{\text{ا ب}}^{2} - \overline{\text{ب ى}}^{2}$ (نظرية فيثاغورس)

وبالتعويض يكون

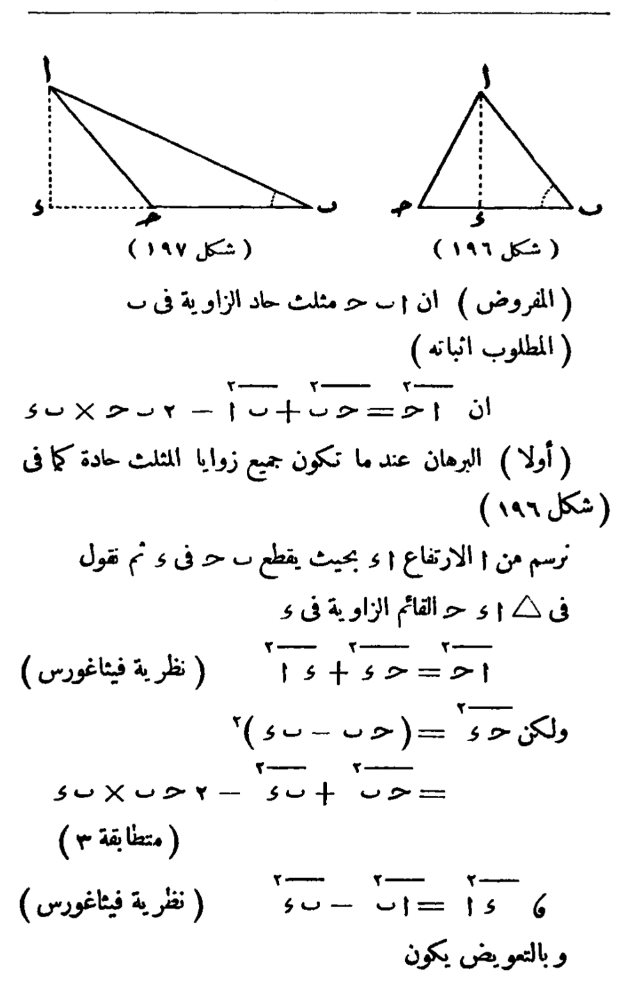
$\overline{\text{ا ح}}^{2} = \overline{\text{ح ب}}^{2} + \overline{\text{ب ى}}^{2} + \text{٢ ب ح} \times \text{ب ى} + \overline{\text{ا ب}}^{2} - \overline{\text{ب ى}}^{2}$

$= \overline{\text{ح ب}}^{2} + \overline{\text{ا ب}}^{2} + \text{٢ ب ح} \times \text{ب ى}$

وهو المطلوب

« نظرية ٨٤ »

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية الحادة في أي مثلث يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين مطروحاً منه ضعف المستطيل المكوّن من احد هذين الضلعين ومسقط الآخر عليه



(شكل ١٩٦)　　(شكل ١٩٧)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث حاد الزاوية فى ب

(المطلوب اثباته)

ان $\overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{حب}}^{2} + \overline{\text{با}}^{2} - ٢ \text{ بح} \times \text{بى}$

(أولا) البرهان عند ما تكون جميع زوايا المثلث حادة كما فى (شكل ١٩٦)

نرسم من ا الارتفاع ا ى بحيث يقطع ب ح فى ى ثم نقول

فى △ ا ى ح القائم الزاوية فى ى

$\overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{حى}}^{2} + \overline{\text{ىا}}^{2}$　　(نظرية فيثاغورس)

ولكن $\overline{\text{حى}}^{2} = (\text{حب} - \text{بى})^{2}$

$= \overline{\text{حب}}^{2} + \overline{\text{بى}}^{2} - ٢ \text{ حب} \times \text{بى}$

(متطابقة ٣)

و $\overline{\text{اى}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} - \overline{\text{بى}}^{2}$　　(نظرية فيثاغورس)

و بالتعويض يكون

$$\overline{\text{اح}}^{٢} = \overline{\text{حب}}^{٢} + \overline{\text{بى}}^{٢} - ٢\ \text{حب} \times \text{بى} + \overline{\text{اب}}^{٢} - \overline{\text{بى}}^{٢}$$

$$= \overline{\text{حب}}^{٢} + \overline{\text{اب}}^{٢} - ٢\ \text{حب} \times \text{بى}$$

وهو المطلوب

(ثانياً) البرهان عند ما تكون احدى زوايا المثلث منفرجة ويقطع العمود ا ى امتداد ب ح في ى كما في (شكل ١٩٧)

في $\triangle$ ا ى ح القائم الزاوية في ى

$$\overline{\text{اح}}^{٢} = \overline{\text{حى}}^{٢} + \overline{\text{اى}}^{٢} \qquad \text{(نظرية فيثاغورس)}$$

ولكن $\overline{\text{حى}}^{٢} = (\text{بى} - \text{بح})^{٢}$

$$= \overline{\text{بى}}^{٢} + \overline{\text{بح}}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{بى}$$

(متطابقة ٣)

، $\overline{\text{اى}}^{٢} = \overline{\text{اب}}^{٢} - \overline{\text{بى}}^{٢}$ (نظرية فيثاغورس)

وبالتعويض يكون

$$\overline{\text{اح}}^{٢} = \overline{\text{بى}}^{٢} + \overline{\text{بح}}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{بى} + \overline{\text{اب}}^{٢} - \overline{\text{بى}}^{٢}$$

$$= \overline{\text{بح}}^{٢} + \overline{\text{اب}}^{٢} - ٢\ \text{بح} \times \text{بى}$$

وهو المطلوب

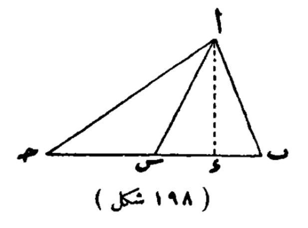
---

*

« نظرية ٨٥ »

(الملقبة بنظرية ابولونيوس)

مجموع المربعين المنشأين على ضلعين من مثلث يكافىء ضعف المربع المنشأ على نصف الضلع الثالث مضافاً اليه ضعف المربع المنشأ على المستقيم المتوسط المنصف لهذا الضلع



(١٩٨ شكل)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث وان ا س المستقيم المتوسط الذى ينصف الضلع ب ح

(المطلوب اثباته) ان $\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢} = ٢\,\overline{\text{ب س}}^{٢} + ٢\,\overline{\text{ا س}}^{٢}$

(البرهان) نرسم الارتفاع ا ء ونفرض انه يقع يمين ا س فتكون ∠ ا س ب حادة ، ∠ ا س ح منفرجة ثم نقول

فى △ ا ب س

$$\overline{\text{ا ب}}^{٢} = \overline{\text{ب س}}^{٢} + \overline{\text{ا س}}^{٢} - ٢\,\text{ب س} \times \text{ء س}$$

(نظرية ٨٤)

وفى △ ا ح س

$\overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{حس}}^{2} + \overline{\text{اس}}^{2} + ٢\ \text{حس} \times \text{ءس}$

(نظرية ٨٣)

وبالجمع يكون

$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{بس}}^{2} + \overline{\text{اس}}^{2} - ٢\ \text{بس} \times \text{ءس}$

$+ \overline{\text{حس}}^{2} + \overline{\text{اس}}^{2} + ٢\ \text{حس} \times \text{ءس}$

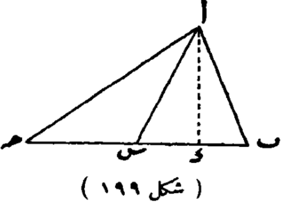
ومن حيث ان ب س = ح س

يكون $\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{بس}}^{2} + ٢\ \overline{\text{اس}}^{2}$

وهو المطلوب

« نظرية ٨٦ »

الفرق بين المربعين المنشأين على ضلعى مثلث يكافىء ضعف المستطيل المكوّن من الضلع الثالث والبعد بين منتصف هذا الضلع وموقع العمود النازل من الرأس المقابل له عليه



(شكل ١٩٩)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث وان ا س المستقيم المتوسط الذى ينصف الضلع ب ح فى س ونقطة ء موقع العمود النازل من ا على ب ح

(المطلوب اثباته) ان $\overline{\text{ا حـ}}^{2} - \overline{\text{ا ب}}^{2} = \text{٢ ب حـ} \times \text{ى س}$

(البرهان) فى △ ا حـ س

$$\overline{\text{ا حـ}}^{2} = \overline{\text{حـ س}}^{2} + \overline{\text{ا س}}^{2} + \text{٢ حـ س} \times \text{ى س}$$

(نظرية ٨٣)

وفى △ ا ب س

$$\overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{ب س}}^{2} + \overline{\text{ا س}}^{2} - \text{٢ ب س} \times \text{ى س}$$

(نظرية ٨٤)

وبالطرح يكون

$$\overline{\text{ا حـ}}^{2} - \overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{حـ س}}^{2} + \overline{\text{ا س}}^{2} + \text{٢ حـ س} + \text{ى س}$$

$$- \overline{\text{ب س}}^{2} - \overline{\text{ا س}}^{2} + \text{٢ ب س} \times \text{ى س}$$

اى ان $\overline{\text{ا حـ}}^{2} - \overline{\text{ا ب}}^{2} = \text{٤ حـ س} \times \text{ى س}$

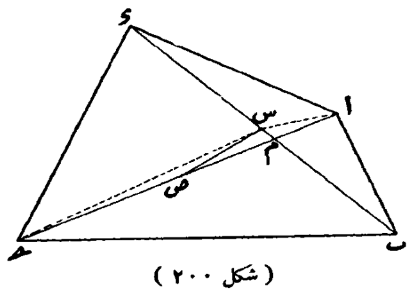
$$= \text{٢ ب حـ} \times \text{ى س}$$

وهو المطلوب

« نظرية ٨٧ »

مجموع المربعات المنشأة على الاضلاع الاربعة لاى شكل رباعى يكافىء مجموع المربعين المنشأين على قطريه مضافاً اليه اربعة أمثال المربع المنشأ على المستقيم الذى يصل منتصفيهما

(المفروض) ان ا ب حـ ى شكل رباعى وان س منتصف قطره ب ى ، ص منتصف قطره ا حـ



(شكل ٢٠٠)

(المطلوب اثباته) ان

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بحـ}}^2 + \overline{\text{حـى}}^2 + \overline{\text{اى}}^2 = \overline{\text{احـ}}^2 + \overline{\text{بى}}^2 + ٤\,\overline{\text{س ص}}^2$$

(البرهان) نصل س ا ، س حـ ثم نقول

فى △ اب ى

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اى}}^2 = ٢\,\overline{\text{ب س}}^2 + ٢\,\overline{\text{ا س}}^2$$

(نظرية ابولونيوس)

وفى △ حـ ب ى

$$\overline{\text{حـ ب}}^2 + \overline{\text{حـ ى}}^2 = ٢\,\overline{\text{ب س}}^2 + ٢\,\overline{\text{حـ س}}^2$$

(نظرية ابولونيوس)

وبالجمع يكون

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بحـ}}^2 + \overline{\text{حـ ى}}^2 + \overline{\text{اى}}^2$$

$$= ٤\,\overline{\text{ب س}}^2 + ٢\left(\overline{\text{ا س}}^2 + \overline{\text{حـ س}}^2\right) \quad \ldots (١)$$

ولكن فى △ اس ح

$\overline{\text{اس}}^{2}$ + $\overline{\text{س ح}}^{2}$ = ٢ $\overline{\text{اص}}^{2}$ + ٢ $\overline{\text{س ص}}^{2}$

(نظرية ابولونيوس)

فيكون ٢ ($\overline{\text{اس}}^{2}$ + $\overline{\text{س ح}}^{2}$) = ٤ $\overline{\text{اص}}^{2}$ + ٤ $\overline{\text{س ص}}^{2}$

وبالتعويض فى متساوية (١) يكون

$\overline{\text{اب}}^{2}$ + $\overline{\text{ب ح}}^{2}$ + $\overline{\text{ح ى}}^{2}$ + $\overline{\text{ى ا}}^{2}$ = ٤ $\overline{\text{ب س}}^{2}$ + ٤ $\overline{\text{اص}}^{2}$ + ٤ $\overline{\text{س ص}}^{2}$

ولكن ٤ $\overline{\text{ب س}}^{2}$ = $\overline{\text{ب ى}}^{2}$ و ٤ $\overline{\text{اص}}^{2}$ = $\overline{\text{اح}}^{2}$

اذن $\overline{\text{اب}}^{2}$ + $\overline{\text{ح ب}}^{2}$ + $\overline{\text{ح ى}}^{2}$ + $\overline{\text{ى ا}}^{2}$

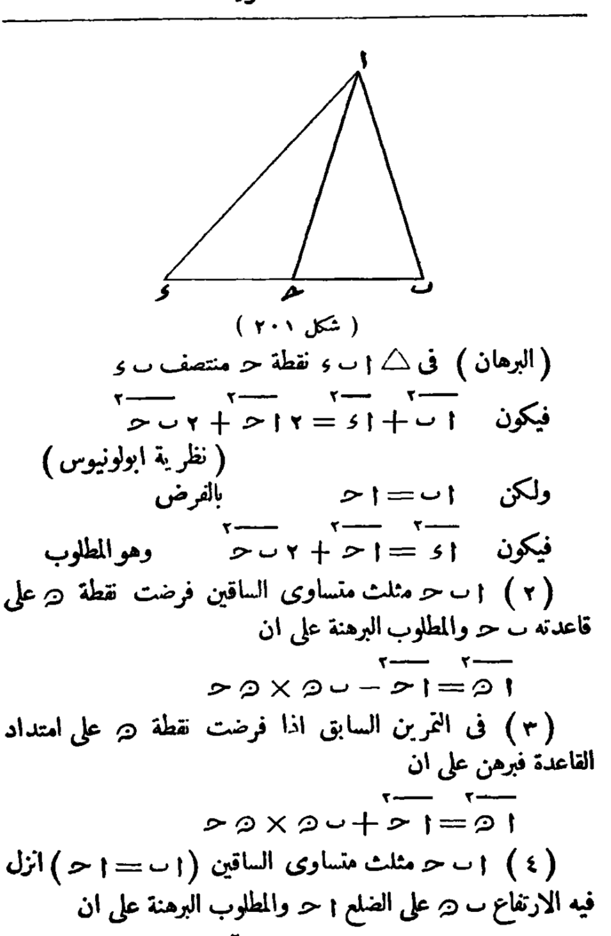
= $\overline{\text{اح}}^{2}$ + $\overline{\text{ب ى}}^{2}$ + ٤ $\overline{\text{س ص}}^{2}$

وهو المطلوب

تمارين (٣١)

(١) اب ح مثلث متساوى الساقين مدت قاعدته ب ح الى ى بحيث كان ح ى = ب ح والمطلوب البرهنة على ان

$\overline{\text{اى}}^{2}$ = $\overline{\text{اح}}^{2}$ + ٢ $\overline{\text{ب ح}}^{2}$



(شكل ٢٠١)

(البرهان) فى △ ا ب د نقطة ح منتصف ب د

فيكون $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 = ٢\,\overline{\text{اح}}^2 + ٢\,\overline{\text{بح}}^2$ (نظرية ابولونيوس)

ولكن اب = اح بالفرض

فيكون $\overline{\text{اد}}^2 = \overline{\text{اح}}^2 + ٢\,\overline{\text{بح}}^2$ وهو المطلوب

(٢) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فرضت نقطة ه على قاعدته ب ح والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{\text{اه}}^2 = \overline{\text{اح}}^2 - \text{به} \times \text{هح}$$

(٣) فى التمرين السابق اذا فرضت نقطة ه على امتداد القاعدة فبرهن على ان

$$\overline{\text{اه}}^2 = \overline{\text{اح}}^2 + \text{به} \times \text{هح}$$

(٤) ا ب ح مثلث متساوى الساقين (اب = اح) انزل فيه الارتفاع ب ه على الضلع ا ح والمطلوب البرهنة على ان

$$٢\,\text{اح} \times \text{حه} = \overline{\text{بح}}^2$$

(٥) اذا كانت الزاويتان ب ، ح في $\triangle$ ا ب ح حادتين وكان ب ه عموداً على ا ح ، ح و عموداً على ا ب فبرهن على ان

$$\text{ا ب} \times \text{ا و} = \text{ا ح} \times \text{ا ه}$$

(٦) في التمرين السابق برهن على أن

$$\text{ب ح}^{2} = \text{ا ب} \times \text{ب و} + \text{ا ح} \times \text{ح ه}$$

(٧) ا ب ح مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا ح) فاذا مد ضلعه ا ح الى ى وكان ح ى = ا ح فبرهن على ان

$$\text{ب ى}^{2} = ٢\,\text{ب ح}^{2} + \text{ا ح}^{2}$$

(٨) ه ا ى مثلث قسمت قاعدته ا ى الى ثلاثة اقسام متساوية بالنقطتين ب ، ح والمطلوب البرهنة على ان

$$\text{ه ا}^{2} + ٢\,\text{ه ى}^{2} = ٣\,\text{ه ح}^{2} + ٦\,\text{ح ى}^{2}$$

(٩) في التمرين السابق برهن على ان

$$\text{ه ا}^{2} + \text{ه ى}^{2} = \text{ه ب}^{2} + \text{ه ح}^{2} + ٤\,\text{ب ح}^{2}$$

(١٠) برهن على أن مجموع المربعات المنشأة على اضلاع متوازى الاضلاع يكافىء مجموع المربعين المنشأين على قطريه

(١١) برهن على ان مجموع المربعين المنشأين على قطرى اى شكل رباعى يكافىء ضعف مجموع المربعين المنشأين على المستقيمين الواصلين بين منتصفى كل ضلعين متقابلين

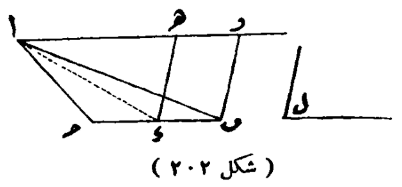
(١٢) برهن على ان ثلاثة امثال مجموع المربعات المنشأة على اضلاع المثلث تكافئ اربعة امثال مجموع المربعات المنشأة على مستقيماته المتوسطة

الباب الرابع

فى الدعاوى العملية

« عملية ٢١ »

المطلوب رسم متوازى اضلاع يكافىء مثلثاً معلوماً بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



(شكل ٢٠٢)

(المفروض) ان ا ب حـ المثلث المعلوم وان ل الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) رسم متوازى اضلاع يكافىء △ ا ب حـ بحيث تكون احدى زواياه تساوى زاوية ل

(العمل) ننصف ب حـ فى ء ونرسم منها المستقيم ء هـ يصنع مع ب ء الزاوية ب ء هـ تساوى ∠ ل ونرسم من ب المستقيم ب و يوازى ء هـ ومن ا المستقيم ا هـ و يوازى حـ ب

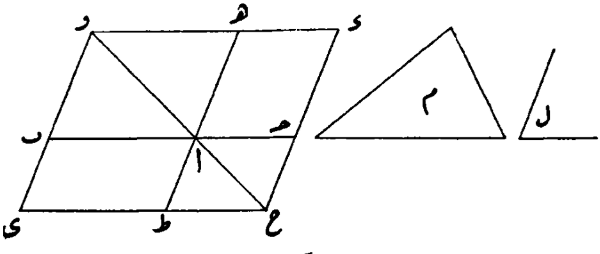
فيكون ب ء هـ و هو متوازى الاضلاع المطلوب

(البرهان) متوازى الاضلاع ب ء هـ و يكافىء ضعف △ ا ب ء (نظرية ٧٦)

ولكن △ ا ب حـ يكافئ ضعف △ ا ب ى
اذن متوازى الاضلاع ب ى هـ و يكافئ △ ا ب حـ
ومن حيث ان احدى زوايا متوازى الاضلاع المذكور وهى ب ى هـ تساوى الزاوية ل المعلومة
يكون ب ى هـ و هو متوازى الاضلاع المطلوب رسمه

« عملية ٢٢ »

المطلوب رسم متوازى اضلاع على قاعدة معلومة يكافئ مثلثاً معلوماً بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



(شكل ٢٠٣)

(المفروض) ان م المثلث المعلوم وان ل الزاوية المعلومة وان ا ب القاعدة المعلومة

(المطلوب عمله) رسم متوازى اضلاع على القاعدة ا ب يكافئ △ م بحيث تكون احدى زواياه تساوى زاوية ل

(العمل) نرسم متوازى اضلاع ا حـ ى هـ يكافئ △ م بحيث تكون احدى زواياه هـ ا حـ مساوية لزاوية ل

ثم نضع هذا المتوازى الاضلاع بحيث تكون قاعدته ا حـ على استقامة القاعدة المعلومة ا ب

ونرسم من ب المستقيم ب و يوازى ا هـ بحيث يقابل امتداد ء هـ فى و ونصل و ا ونمده الى أن يقابل امتداد ء حـ فى ح

ثم نرسم من ح المستقيم ح ط ى يوازى حـ ب ، ء و ويقابل امتدادى هـ ا ، و ب فى ط ، ى

فيكون ا ط ى ب هو متوازى الاضلاع المطلوب

(البرهان) من حيث ان متوازيى الاضلاع ء ا ، ا ى متممان لمتوازيى الاضلاع هـ ب ، حـ ط المرسومين على قطر متوازى الاضلاع ء ى

يكون متوازى الاضلاع ا ى يكافئ متوازى الاضلاع ء ا (نظرية ٨٠)

ولكن متوازى الاضلاع ء ا يكافئ المثلث م بالعمل

اذن متوازى الاضلاع ا ى يكافئ المثلث م

ومن حيث ان ∠ ط ا ى = ∠ هـ ا حـ بالتقابل فى الرأس

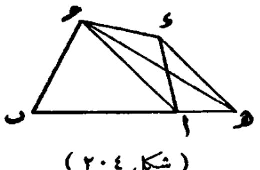
، ∠ هـ ا حـ = ∠ ل بالعمل

اذن ∠ ط ا ى = ∠ ل

ويكون متوازى الاضلاع ا ط ى ب هو المطلوب رسمه لانه يكافئ المثلث م واحدى زواياه تساوى ∠ ل

« عملية ٢٣ »

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا رباعياً معلوماً



(شكل ٢٠٤)

(المفروض) ان ا ب حـ ء الشكل الرباعى المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مثلث يكافئ هذا الشكل الرباعى

(العمل) نصل القطر ا حـ ونرسم من ء المستقيم ء هـ يوازى حـ ا ويقابل امتداد ب ا فى هـ

ثم نصل حـ هـ فيكون هـ حـ ب هو المثلث المطلوب

(البرهان) من حيث ان المثلثين هـ ا حـ ، ء ا حـ على قاعدة واحدة وهى ا حـ وبين المتوازيين ء هـ ، حـ ا

يكون المثلث هـ ا حـ يكافئ المثلث ء ا حـ (نظرية ٧٧)

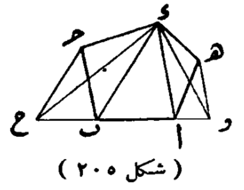
وباضافة المثلث ب ا حـ الى كل من المثلثين هـ ا حـ ، ء ا حـ يكون الشكلان الناتجان متكافئين

ويكون △ هـ حـ ب يكافئ الشكل الرباعى ا ب حـ ء

وهو المطلوب

« عملية ٢٤ »

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا ذا خمسة أضلاع

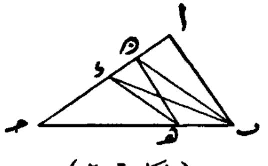


(شكل ٢٠٥)

(المفروض) ان ا ب حـ ى هـ الشكل ذو خمسة الاضلاع المعلوم
(المطلوب عمله) رسم مثلث يكافىء هذا الشكل
(العمل) نصل ى ا ، ى ب ونرسم هـ و يوازى ى ا ويقطع امتداد ب ا فى و ، حـ ع يوازى ى ب ويقطع امتداد ا ب فى ع ثم نصل ى و ، ى ع فيكون و ى ع هو المثلث المطلوب
(البرهان) △ و ا ى يكافئ △ هـ ا ى (نظرية ٧٧)
، △ ع ب ى يكافئ △ حـ ب ى (نظرية ٧٧)
اذن
△ و ا ى + △ ع ب ى يكافئ △ هـ ا ى + △ حـ ب ى
وباضافة △ ا ى ب الى كل من طرفى هذا التكافؤ
يكون △ و ى ع يكافئ المخمس ا ب حـ ى هـ وهو المطلوب
(نتيجة) يمكن تحويل اى شكل كثير الاضلاع الى آخر يكافئه ويكون عدد رءوسه أقل واحداً من عدد رءوس الاول وبالاستمرار يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مثلث يكافئه

« عملية ٢٥ »

المطلوب تنصيف مثلث معلوم بمستقيم يمر بنقطة مفروضة على أحد اضلاعه



(شكل ٢٠٦)

(المفروض) ان ا ب ﺣ المثلث المعلوم وان ﺩ نقطة مفروضة على أحد اضلاعه ا ﺣ

(المطلوب عمله) رسم مستقيم من نقطة ﺩ ينصف هذا المثلث

(العمل) ننصف ا ﺣ فى ﺀ ثم نصل ﺩ ب ونرسم من ﺀ المستقيم ﺀ ﻫ يوازى ﺩ ب ويقطع ب ﺣ فى ﻫ

ونصل ﺩ ﻫ فيكون هذا المستقيم هو المنصف المطلوب

(البرهان) △ ب ﻫ ﺀ يكافئ △ ﺩ ﻫ ﺀ (نظرية ٧٧)

وباضافة △ ﺣ ﻫ ﺀ الى كل من هذين المثلثين

يكون △ ب ﺣ ﺀ يكافئ △ ﺩ ﻫ ﺣ

ولكن △ ب ﺣ ﺀ يكافئ نصف △ ا ب ﺣ

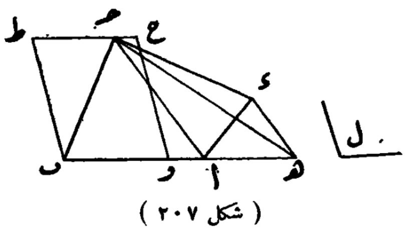
اذن △ ﺩ ﻫ ﺣ يكافئ نصف △ ا ب ﺣ

ويكون الشكل الرباعى ا ب ﻫ ﺩ يكافئ النصف الآخر من المثلث

اذن ﺩ ﻫ ينصف المثلث ويمر بنقطة ﺩ وهو المطلوب

« عملية ٢٦ »

المطلوب رسم متوازى اضلاع يكافئ كثير اضلاع معلوماً بحيث تكون احدى زواياة مساوية لزاوية معلومة



(شكل ٢٠٧)

(المفروض) ان ا ب حـ ء كثير الاضلاع المعلوم وان ل الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) رسم متوازى أضلاع يكافئ ا ب حـ ء بحيث تكون احدى زواياه مساوية ∠ ل

(العمل) أولا — نحول كثير الاضلاع ا ب حـ ء الى المثلث هـ ب حـ بالطريقة المتقدمة فى عمليتى (٢٣ و ٢٤)

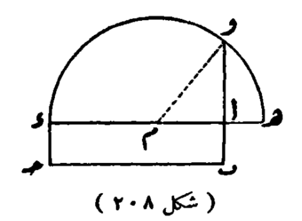
ثانياً — نرسم متوازى الاضلاع و ب ط ح يكافئ المثلث هـ ب حـ بحيث تكون احدى زواياه و ب ط = ∠ ل وذلك بالطريقة المتقدمة فى عملية (٢١)

اذن متوازى الاضلاع و ب ط ح يكافئ كثير الاضلاع ا ب حـ ء واحدى زواياه = ∠ ل وهو المطلوب

(نتيجة) يمكن تحويل أى كثير اضلاع الى مستطيل

« عملية ٢٧ »

المطلوب رسم مربع يكافئ مستطيلا معلوماً



(شكل ٢٠٨)

(المفروض) ان ا ب ح ء المستطيل المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مربع يكافىء المستطيل المعلوم

(العمل) نمد ء ا الى ه بحيث يكون ا ه = ا ب ثم نرسم على ه ء نصف دائرة ونمد ب ا الى ان يقطع المحيط فى و فيكون ا و ضلع المربع المطلوب

(البرهان) ننصف ه ء فى م ونصل م و

فيكون $\overline{\text{ا و}}^{2} = \overline{\text{م و}}^{2} - \overline{\text{م ا}}^{2}$ (نظرية فيثاغورس)

$= (\text{م و} + \text{م ا})(\text{م و} - \text{م ا})$ (متطابقة ٤)

ولكن م و = م ه = م ء (انصاف اقطار)

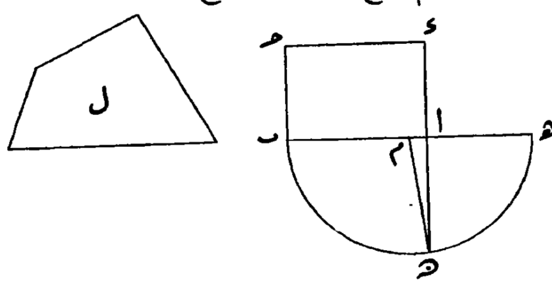
اذن $\overline{\text{ا و}}^{2} = (\text{م ء} + \text{م ا})(\text{م ه} - \text{م ا})$

$= \text{ء ا} \times \text{ا ه}$

$= \text{ء ا} \times \text{ا ب}$ وهو المطلوب

« عملية ٢٨ »

المطلوب رسم مربع يكافئ كثير اضلاع معلوماً



(شكل ٢٠٩)

(المفروض ان ل كثير اضلاع معلوم

(المطلوب عمله) رسم مربع يكافئ كثير الاضلاع المعلوم

(العمل) اولا — نحول كثير الاضلاع الى المستطيل ا ب ﺣ ء بالطريقة المتقدمة فى عملية (٢٦)

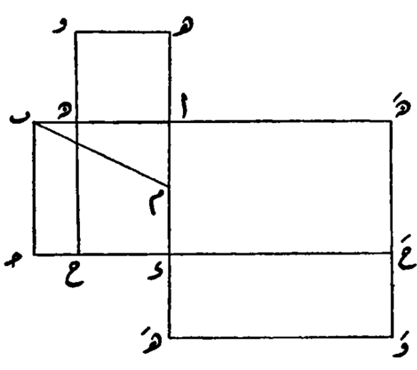
ثانياً — نحول المستطيل ا ب ﺣ ء الى المربع الذى ضلعه ا ﻫ بالطريقة المتقدمة فى عملية (٢٧)

فيكون المربع المنشأ على ا ﻫ مكافئاً كثير الاضلاع ل وهو المطلوب

« عملية ٢٩ »

المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى جزأين (من الداخل ومن الخارج) بحيث يكون المستطيل المكوّن من المستقيم بتمامه وأحد

جزأيه مكافئاً المربع المنشأ على الجزء الآخر



(شكل ٢١٠)

(المفروض) ان ا ب المستقيم المعلوم

(المطلوب عمله أولا) تقسيم هذا المستقيم من الداخل فى نقطة مثل ﻫ بحيث يكون ا ب × ب ﻫ = ا ﻫ^٢

(العمل) نرسم على ا ب فى احدى جهتيه المربع ا ب ج ء ثم ننصف ا ء فى م ونصل ب م ثم نمد م ا الى ه بحيث يكون م ه = م ب ونرسم على ا ه المربع ا ه و ﻫ فتكون ﻫ هى نقطة الانقسام من الداخل ويكون

ا ب × ب ﻫ = ا ﻫ^٢

(البرهان) نمد و ﻫ على استقامته الى ان يقطع ء ج فى ح فينقسم المربع ا ج الى المستطيلين ا ح ، ﻫ ج

وفى △ ا ب م

ا ب^2 = ب م^2 − م ا^2 (نظرية فيثاغورس)

= (ب م + م ا) (ب م − م ا) (متطابقة ٤)

ولكن ب م = م هـ ، م ا = م ى

اذن ا ب^2 = (م هـ + م ى) (م هـ − م ا)

= هـ ى × ا هـ

= هـ ى × هـ و

اى ان المربع ا ب حـ ى يكافىء المستطيل هـ و ح ى

ولو طرحنا المستطيل ا ن ح ى من كل من الشكلين المتكافئين ا ب حـ ى ، هـ و ح ى كان الباقيان متكافئين

اى ان المستطيل ن ب حـ ح يكافىء المربع هـ و ن ا

ويكون حـ ب × ب ن = ا ن^2

اى ان ا ب × ب ن = ا ن^2 وهو المطلوب

(المطلوب عمله ثانياً) تقسيم المستقيم ا ب من الخارج فى نقطة مثل ن َ بحيث يكون ا ب × ب ن َ = ا ن َ^{2}

(العمل) فى شكل (٢١٠) نمد م ى على استقامته الى هـ َ بحيث يكون م هـ َ = م ب ونرسم على ا هـ َ المربع ا هـ َ و َ ن َ فتكون ن َ هى نقطة الانقسام من الخارج ويكون

ا ب × ب ن َ = ا ن َ^{2}

(البرهان) نمد حـ ى على استقامته الى ان يقطع و َ ن َ فى

ح' فينقسم المربع ا هـ' و' ت' الى المستطيلين ا ح' ٬ ى و'
وقد تقدم فى البرهنة على الجزء الاول من هذه العملية ان
المربع ا ب حـ ى يكافئ المستطيل هـ و ح ى
فيكون المربع ا ب حـ ى يكافئ المستطيل ى هـ' و' ح'
ولو أضفنا المستطيل ا ى ح' ت' الى كل من الشكلين المتكافئين
ا ب حـ ى ٬ ى هـ' و' ح' كان الناتجان متكافئين
أى ان المستطيل ب حـ ح' ت' يكافئ المربع ا هـ' و' ت'

ويكون $\text{حـ ب} \times \text{ب ت}' = \overline{\text{ا ت}'}^2$

أى ان $\text{ا ب} \times \text{ب ت}' = \overline{\text{ا ت}'}^2$ وهو المطلوب

ملاحظة ١ — اذا انقسم المستقيم الى جزأين (من الداخل أو من الخارج) وكان المستطيل المكوّن من المستقيم بتمامه وأحد جزأيه مكافئاً المربع المنشأ على الجزء الآخر قيل ان المستقيم منقسم قسمة ذات وسط وطرفين

ملاحظة ٢ — لايجاد طول الوسط المتناسب بدلالة المستقيم المعلوم عند انقسامه من الداخل الى قسمة ذات وسط وطرفين

(الطريقة) فى شكل (٢١٠) نعلم ان

$$\overline{\text{م ب}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا م}}^2$$

$$= \overline{\text{ا ب}}^2 + \left(\frac{\text{ا ب}}{٢}\right)^2$$

$$= \frac{٥\ \overline{\text{ا ب}}^2}{٤}$$

ويكون $\text{م ب} = \frac{\text{ا ب}}{٢}\sqrt{٥}$

ولكن $\text{ان} = \text{اهـ}$

$$= \text{مهـ} - \text{ما}$$

$$= \text{مب} - \text{ما}$$

$$= \frac{\text{اب}}{٢}\sqrt{٥} - \frac{\text{اب}}{٢}$$

$$= \frac{\text{اب}}{٢}\left(\sqrt{٥} - ١\right)$$

ملاحظة ٣ — لايجاد طول الوسط المتناسب بدلالة المستقيم المعلوم عند انقسامه مَن الخارج الى قسمة ذات وسط وطرفين

(الطريقة) فى شكل (٢١٠) نعلم ان

$$\text{ان}' = \text{مهـ}' + \text{ما}$$

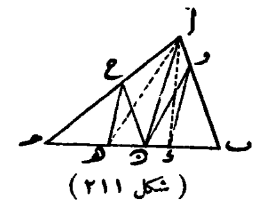
$$= \text{مب} + \text{ما}$$

$$= \frac{\text{اب}}{٢}\sqrt{٥} + \frac{\text{اب}}{٢}$$

$$= \frac{\text{اب}}{٢}\left(\sqrt{٥} + ١\right)$$

(تمارين ٣٢)

(١) المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى ثلاثة أجزاء متكافئة بمستقيمين يمران بنقطة مفروضة على أحد أضلاعه



(شكل ٢١١)

(المفروض) ان ا ب حـ المثلث المعلوم ، ﻫ النقطة المفروضة على أحد الاضلاع وليكن ب حـ

(المطلوب عمله) رسم مستقيمين يمران بنقطة ﻫ ويقسمان المثلث الى ثلاثة اجزاء متكافئة

(العمل) نقسم ب حـ الى ثلاثة أقسام متساوية بالنقطتين ء ، ﻫ ثم نصل ا ء ونرسم ء و ، ﻫ ع يوازيان ا ء ونصل ﻫ و ، ﻫ ع فيكونان هما المستقيمين اللذين يقسمان المثلث ا ب حـ الى ثلاثة اجزاء متكافئة

(البرهان) نصل ا ء ، ا ﻫ ثم نقول

من حيث ان ب ء = ء ﻫ = ﻫ حـ = $\frac{1}{3}$ ب حـ

يكون كل من المثلثات ا ب ء ، ا ء ﻫ ، ا ﻫ حـ يكافئ $\frac{1}{3}$ △ ا ب حـ

ولكن △ ﻫ ء و يكافئ △ ا ء و (نظرية ٧٧)

و باضافة △ ب و ء الى كل من المثلثين المتكافئين

يكون △ ﻫ ب و يكافئ △ ا ء ب

اى ان △ ﻫ ب و يكافئ $\frac{1}{3}$ △ ا ب حـ

وكذلك نبرهن على ان △ ﻫ حـ ع يكافئ $\frac{1}{3}$ △ ا ب حـ

فيكون الشكل الرباعى ﻫ و ا ع يكافئ الثلث الباقى من المثلث ا ب حـ

و بذلك يقسم المستقيمان ﻫ و ، ﻫ ع المثلث ا ب حـ الى ثلاثة اجزاء متكافئة وهو المطلوب

(٢) ا ب حـ مثلث ، ء نقطة مفروضة على قاعدته ب حـ أو على امتدادها والمطلوب رسم مثلث يكافىء المثلث ا ب حـ على شرط انَ تكون ب ء قاعدة له

(٣) المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى أربعة اجزاء متكافئة بثلاثة مستقيمات تمر بنقطة مفروضة على احد اضلاعه

(٤) المعلوم مثلث ونقطة مفروضة على احد اضلاعه والمطلوب رسم مستقيم من هذه النقطة يقطع من المثلث جزأ يكافئ خمسه أو سدسه أو اى كسر آخر منه

(٥) المعلوم شكل رباعى والمطلوب ايجاد نصفه أو ثلثه أو ربعه أو خمسه أو اى كسر آخر منه برسم مستقيم من أحد رءوسه

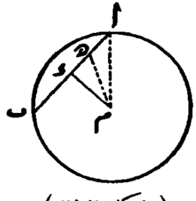
(٦) اذا قسم مستقيم من الداخل قسمة ذات وسط وطرفين واخذ على اكبر جزأيه بعد مساو لاصغرهما انقسم الجزء الاكبر بذلك قسمة ذات وسط وطرفين

البـــاب الخامس

فى المستطيل من حيث علاقته بالدائرة

« نظرية ٨٨ »

اذا رسم وتر فى دائرة وفرضت نقطة عليه كان المستطيل المكون من جزأى الوتر مكافئاً المربع المنشأ على نصف القطر مطروحاً منه المربع المنشأ على المستقيم الذى يصل المركز بنقطة التقسيم



(شكل ٢١٢)

(المفروض) ان ا ب وتر فى الدائرة التى مركزهـا م وان ه نقطة ما فرضت عليه

(المطلوب اثباته) ان $\text{ه ا} \times \text{ه ب} = \text{نق}^{2} - \overline{\text{م ه}}^{2}$

(البرهان) نرسم من م عموداً على الوتر ا ب مثل م ى

فيكون ى ا = ى ب (نظرية ٥٠)

وفى △ م ى ا القائم الزاوية فى ى

$\overline{\text{م ا}}^{2} = \overline{\text{م ى}}^{2} + \overline{\text{ى ا}}^{2}$ (نظرية فيثاغورس)

وكذلك فى $\triangle$ م ى ه القائم الزاوية فى ى

$$\overline{\text{م ه}}^{2} = \overline{\text{م ى}}^{2} + \overline{\text{ى ه}}^{2}$$

وبالطرح يكون

$$\overline{\text{م ا}}^{2} - \overline{\text{م ه}}^{2} = \overline{\text{م ى}}^{2} + \overline{\text{ى ا}}^{2} - \overline{\text{م ى}}^{2} - \overline{\text{ى ه}}^{2}$$

$$= \overline{\text{ى ا}}^{2} - \overline{\text{ى ه}}^{2}$$

$$= (\text{ى ا} + \text{ى ه})(\text{ى ا} - \text{ى ه})$$

(متطابقة ٤)

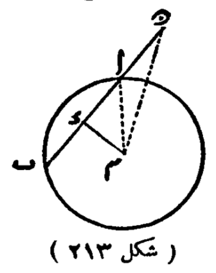
$$= (\text{ى ب} + \text{ى ه})(\text{ى ا} - \text{ى ه})$$

$$= \text{ه ب} \times \text{ه ا}$$

اى ان $\text{ه ا} \times \text{ه ب} = \text{نق}^{2} - \overline{\text{م ه}}^{2}$ وهو المطلوب

« نظرية ٨٩ »

اذا رسم وتر فى دائرة وفرضت نقطة على امتداده كان المستطيل المكوّن من جزأى الوتر مكافئاً المربع المنشأ على المستقيم الذى يصل المركز ونقطة التقسيم مطروحاً منه المربع المنشأ على نصف القطر



(شكل ٢١٣)

(المفروض) ان ا ب وتر فى الدائرة التى مركزها م وان هـ نقطة ما فرضت على امتداده

(المطلوب اثباته) ان هـ ا × هـ ب = م هـ² − نق²

(البرهان) نرسم من م عموداً على الوتر ا ب مثل م ى فيقسم ا ب الى قسمين متساويين ثم نقول

فى △ م ى هـ القائم الزاوية فى ى

م هـ² = م ى² + ى هـ² (نظرية فيثاغورس)

وفى △ م ى ا القائم الزاوية فى ى

م ا² = م ى² + ى ا² (نظرية فيثاغورس)

وبالطرح يكون

م هـ² − م ا² = م ى² + ى هـ² − م ى² − ى ا²

= ى هـ² − ى ا²

= (ى هـ + ى ا) (ى هـ − ى ا) (متطابقة ٤)

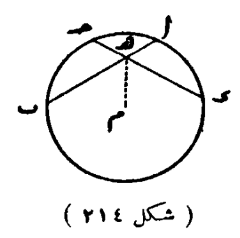
= (ى هـ + ى ب) (ى هـ − ى ا)

= هـ ب × هـ ا

اى ان هـ ا × هـ ب = م هـ² − نق² وهو المطلوب

« نظرية ٩٠ »

اذا تقاطع وتران داخل الدائرة كان المستطيل المكون من جزأى أحدهما مكافئاً المستطيل المكون من جزأى الآخر



(شكل ٢١٤)

(المفروض) ان ا ب ، حـ ء وتران تقاطعا داخل الدائرة في هـ

(المطلوب اثباته) ان ا هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

(البرهان) نصل م هـ ثم نقول

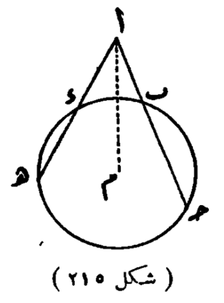
ا هـ × هـ ب = نق٢ − م هـ٢ (نظرية ٨٨)

، حـ هـ × هـ ء = نق٢ − م هـ٢ (نظرية ٨٨)

اذن ا هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء وهو المطلوب

« نظرية ٩١ »

اذا مد من نقطة خارج دائرة قاطعان لها كان المستطيل المكون من أحد القاطعين وجزئه الخارج مكافئاً المستطيل المكون من القاطع الثاني وجزئه الخارج



(شكل ٢١٥)

(المفروض) ان ا نقطة ما خارج الدائرة وان ا ب ح ، ا ء ه قاطعان لها

(المطلوب اثباته) ان ا ح × ا ب = ا ه × ا ء

(البرهان) نصل م ا ثم نقول

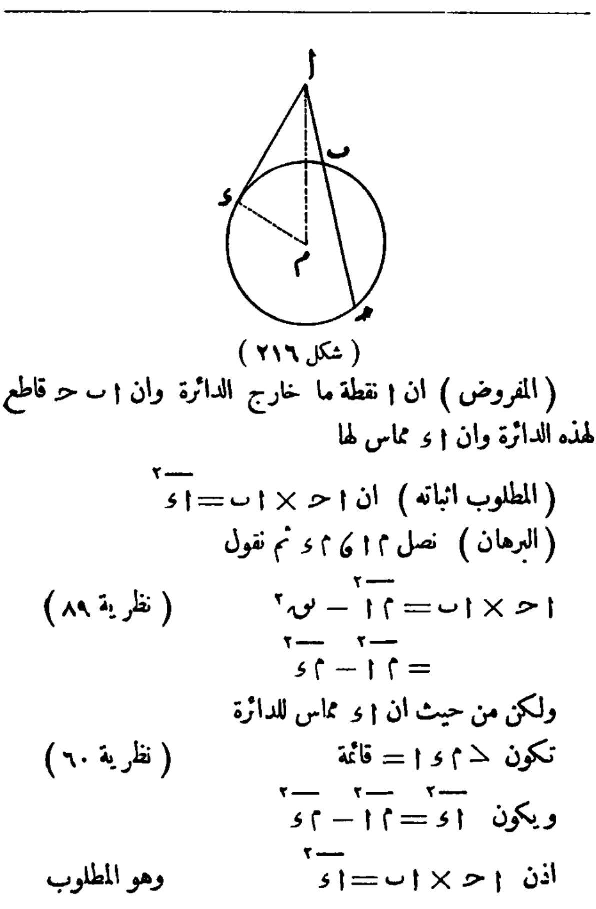
ا ح × ا ب = م ا² − نق² (نظرية ٨٩)

، ا ه × ا ء = م ا² − نق² (نظرية ٨٩)

اذن ا ح × ا ب = ا ه × ا ء وهو المطلوب

« نظرية ٩٢ »

اذا فرضت نقطة خارج الدائرة ورسم منها مماس وقاطع لها كان المستطيل المكون من القاطع بتمامه وجزئه الخارج مكافئاً المربع المنشأ على المماس



(شكل ٢١٦)

(المفروض) ان ا نقطة ما خارج الدائرة وان ا ب حـ قاطع لهذه الدائرة وان ا ى مماس لها

(المطلوب اثباته) ان ا حـ × ا ب = $\overline{\text{ا ى}}^{2}$

(البرهان) نصل م ا ، م ى ثم نقول

ا حـ × ا ب = $\overline{\text{م ا}}^{2}$ − نق^{2} (نظرية ٨٩)

= $\overline{\text{م ا}}^{2}$ − $\overline{\text{م ى}}^{2}$

ولكن من حيث ان ا ى مماس للدائرة

تكون ∠ م ى ا = قائمة (نظرية ٦٠)

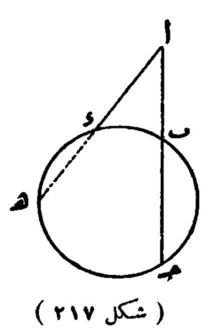
ويكون $\overline{\text{ا ى}}^{2}$ = $\overline{\text{م ا}}^{2}$ − $\overline{\text{م ى}}^{2}$

اذن ا حـ × ا ب = $\overline{\text{ا ى}}^{2}$ وهو المطلوب

« نظرية ٩٣ »

(وهى عكس نظرية ٩٢)

اذا مد من نقطة خارج دائرة مستقيمان أحدهما يقطعها والآخر يلاقيها وكان المستطيل المكون من القاطع بتمامه وجزئه الخارج مكافئاً المربع المنشأ على المستقيم الذى يلاقى الدائرة كان هذا المستقيم مماساً لها فى نقطة تلاقيه



(شكل ٢١٧)

(المفروض) ان ا نقطة ما خارج الدائرة وان ا ب حـ قاطع لهذه الدائرة ، ا ء مستقيم يلاقى الدائرة فى نقطة ء بحيث ان

ا حـ × ا ب = $\overline{\text{ا ء}}^{2}$

(المطلوب اثباته) ان ا ء يمس الدائرة فى ء

(البرهان) ان لم يكن ا ء مماساً للدائرة فى ء فبامتداده يقطع الدائرة فى نقطة اخرى مثل هـ

ويكون ا حـ × ا ب = ا هـ × ا ء (نظرية ٩١)

ولكن ا حـ × ا ب = ا ى^{2} بالفرض

اذن ا هـ × ا ى = ا ى^{2}

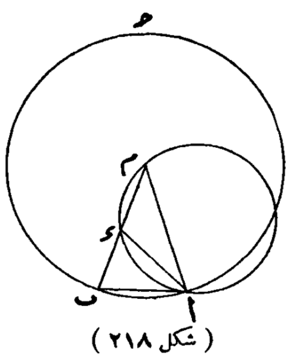
اى ان ا هـ = ا ى

وهذا لا يتأتى الا اذا وقعت نقطة هـ على ى اى ان ا ى لا يمكن ان يلاقى الدائرة فى نقطة اخرى غير ى

وعلى ذلك يكون ا ى مماسا للدائرة فى ى وهو المطلوب

« عملية ٣٠ »

المطلوب رسم مثلث متساوى الساقين كل من زاويتى قاعدته تساوى ضعف زاوية رأسه



(شكل ٢١٨)

(العمل) نرسم مستقيما ما مثل م ب ونقسمه من الداخل فى ى بحيث يكون م ب × ب ى = م ى^{2}

ثم نركز فى م و بنصف قطر يساوى م ب نرسم الدائرة ا ب حـ
ونرسم فيها الوتر ب ا = م ى ونصل م ا فيكون م ب ا المثلث المطلوب

(البرهان) نصل ا ى ونرسم دائرة تمر برءوس المثلث م ى ا

فمن حيث ان م ب × ب ى = $\overline{\text{م ى}}^{٢}$ بالعمل

يكون م ب × ب ى = $\overline{\text{ب ا}}^{٢}$

ويكون ب ا مماساً للدائرة م ى ا فى ا (نظرية ٩٣)

وتكون ∠ ب ا ى = ∠ ى م ا (نظرية ٧٣)

ولكن ∠ ب ى ا = ∠ ى م ا + ∠ ى ا م (نظرية ٣٦)

= ∠ ب ا ى + ∠ ى ا م

= ∠ ب ا م

، ∠ ب ا م = ∠ ا ب م (نظرية ٦)

اذن ∠ ب ى ا = ∠ ا ب م

ويكون ى ا = ا ب = ى م (نظرية ٧)

وتكون ∠ ى ا م = ∠ ا م ى (نظرية ٦)

= ∠ ب ا ى

اى ان ∠ ب ا م = ٢ ∠ ب ا ى

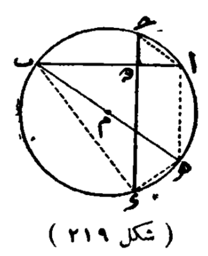
= ٢ ∠ ى م ا

وبذلك تكون كل من زاويتى القاعدة ب ا م ، ا ب م فى المثلث
م ب ا ضعف زاوية رأسه ا م ب وهو المطلوب

(ملاحظة) من حيث ان مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين ففى △ م ب ا تكون ∠ ا م ب = ٣٦° وكل من زاويتى القاعدة ب ا م ، ا ب م = ٧٢°

تمارين (٣٣)

(١) ا ه ب ، حـ ه ى وتران متقاطعان فى دائرة واحدهما عمودى على الآخر والمطلوب البرهنة على ان مجموع المربعات المنشأة على ه ا ، ه ب ، ه حـ ، ه ى يكافئ المربع المنشأ على قطر الدائرة



(شكل ٢١٩)

(المفروض) ان ا ه ب عمود على حـ ه ى

(المطلوب اثباته) ان

$\overline{ه ا}^{٢}$ + $\overline{ه ب}^{٢}$ + $\overline{ه حـ}^{٢}$ + $\overline{ه ى}^{٢}$ = المربع المنشأ على القطر

(البرهان) نرسم ا هـ يوازى حـ ى ثم نصل ب هـ ، ب ى ، حـ ا ، هـ ى

فمن حيث ان ح د عمودى على ا ب ، ا ه يوازى ح د

تكون ∠ ب ا ه قائمة (نظرية ٢٨)

ويكون ب ه قطراً للدائرة (نظرية ٦٩)

وتكون ∠ ب د ه قائمة (» »)

فى △ ب م د القائم الزاوية فى م

ب م^{2} + د م^{2} = ب د^{2} (نظرية فيثاغورس)

وفى △ ا م ح القائم الزاوية فى م

ا م^{2} + ح م^{2} = ا ح^{2} (نظرية فيثاغورس)

وبجمع هاتين المتساويتين

يكون ا م^{2} + ب م^{2} + ح م^{2} + د م^{2} = ب د^{2} + ا ح^{2}

ومن حيث ان الوترين المتساويين يحصران بينهما قوسين متساويتين

يكون ا ح = د ه (نظرية ٥٣)

، ا ح^{2} = د ه^{2}

وبالتعويض يكون

ا م^{2} + ب م^{2} + ح م^{2} + د م^{2} = ب د^{2} + د ه^{2}

ولكن فى △ ب د ه القائم الزاوية فى د

ب د^{2} + د ه^{2} = ب ه^{2} (نظرية فيثاغورس)

اذن ا م^{2} + ب م^{2} + ح م^{2} + د م^{2} = ب ه^{2}

وهو المطلوب

(٢) اذا رسمنا نصف دائرة على مستقيم معلوم مثل ا ب وأقمنا من احدى نقطه ن عمودا عليه مثل ن ل فقابل المحيط فى ل فاستنتج من نظرية (٩٠) أن

ا ن × ن ب = ن ل ^٢

(٣) اذا تقاطعت دائرتان وفرضت نقطة ما مثل ن على الوتر المشترك بينهما ومر بها وتران احدهما ا ب فى احدى الدائرتين والآخر ح ء فى الدائرة الثانية فبرهن على ان

ا ن × ن ب = ح ن × ن ء

(٤) اذا تقاطعت دائرتان وفرضت نقطة ما على امتداد الوتر المشترك كانت المماسات الممدودة من هذه النقطة الى الدائرتين متساوية

(٥) اذا كان ا ب مماسا مشتركا لدائرتين متقاطعتين فى س ، ص كان امتداد س ص منصفا له

(٦) ا ب ح مثلث انزل من ا العمود ا ء على ب ح ومن ب العمود ب ه على ح ا فتقاطع العمودان فى م برهن على ان

ا م × م ء = ب م × م ه

(٧) اذا كانت م مركز دائرة معلومة وكانت ن نقطة ما خارجة عن الدائرة فاذا مد منها المماسان ن ا ، ن ب الى المحيط ثم وصل م ن فقطع الوتر ا ب فى ل فبرهن على ان

م ن × ن ل = ن ا ^٢

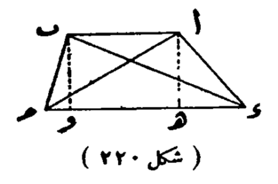
(٨) فى التمرين السابق اذا فرض ان نصف قطر الدائرة نق فبرهن على ان

م ن × م ل = نق ^٢

تمارين عامة

(١) ا ب حـ ى شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان ا ب ، ى حـ فاذا كانت كل من زاويتى حـ ، ى حادة فبرهن على ان

$$\overline{\text{احـ}}^{2} + \overline{\text{بى}}^{2} = \overline{\text{اى}}^{2} + \overline{\text{بحـ}}^{2} + ٢\,\text{حـى} \times \text{ات}$$



(شكل ٢٢٠)

(البرهان) نرسم الارتفاعين ا هـ ، ب و ثم نقول

فى △ ا حـ ى الحاد الزاوية فى ى

$$\overline{\text{احـ}}^{2} = \overline{\text{اى}}^{2} + \overline{\text{حـى}}^{2} - ٢\,\text{حـى} \times \text{ى هـ}$$

(نظرية ٨٤)

وفى △ ب حـ ى الحاد الزاوية فى حـ

$$\overline{\text{بى}}^{2} = \overline{\text{بحـ}}^{2} + \overline{\text{حـى}}^{2} - ٢\,\text{حـى} \times \text{حـو}$$

(نظرية ٨٤)

وبجمع هاتين المتساويتين يكون

$$\overline{\text{احـ}}^{2} + \overline{\text{بى}}^{2}$$

$$= \overline{\text{اى}}^{2} + \overline{\text{حـى}}^{2} - ٢\,\text{حـى} \times \text{ى هـ}$$

$$+ \overline{\text{بحـ}}^{2} + \overline{\text{حـى}}^{2} - ٢\,\text{حـى} \times \text{حـو}$$

$$= \overline{\text{اى}}^{٢} + \overline{\text{بحـ}}^{٢} + ٢\,\overline{\text{حـى}}^{٢} - ٢\,\text{حـى} \times \text{ىهـ} - ٢\,\text{حـى} \times \text{حـو}$$

$$= \overline{\text{اى}}^{٢} + \overline{\text{بحـ}}^{٢} + ٢\,\text{حـى}\,(\text{حـى} - \text{ىهـ} - \text{حـو})$$

$$= \overline{\text{اى}}^{٢} + \overline{\text{بحـ}}^{٢} + ٢\,\text{حـى} \times \text{هـو}$$

$$\therefore = \overline{\text{اى}}^{٢} + \overline{\text{بحـ}}^{٢} + ٢\,\text{حـى} \times \text{اب}$$

وهو المطلوب

(٢) اذا فرض متوازى اضلاع ورسم اى مستقيم يمر بنقطة تقاطع قطريه فبرهن على أن هذا المستقيم يقسمه الى جزأين متكافئين

(٣) المطلوب تقسيم متوازى اضلاع الى ثلاثة متوازيات اضلاع متكافئة

(٤) المطلوب تقسيم متوازى اضلاع الى جزأين متكافئين بمستقيم يكون عمودا على أحد اضلاعه

(٥) المطلوب رسم مثلث متساوى الساقين على قاعدة مثلث معلوم بحيث يكافئه

(٦) ا ب حـ مثلث رسم فيه المستقيم المتوسط ب ى ومد على استقامته الى هـ بحيث كان ى هـ = ى ب والمطلوب البرهنة على أن △ هـ ب حـ يكافئ △ ا ب حـ

(٧) ا ب حـ ى شبه منحرف نُصف ضلعاه المتوازيان اب، حـى فى س ، ص والمطلوب البرهنة على ان س ص يقسم شبه المنحرف الى جزأين متكافئين

(٨) فى التمرين السابق اذا فرض ان نقطة م منتصف س ص فبرهن على ان اى مستقيم يمر بها ويقطع ا ب ، حـ ى (لا امتدادهما)

يقسم شبه المنحرف الى جزأين متكافئين

(٩) اذا وصل بين منتصفات اضلاع الشكل الرباعى على الترتيب بمستقيمات كان متوازى الاضلاع الحادث مكافئاً لنصف الشكل الرباعى المعلوم

(١٠) ا ب حـ مثلث نُصف ضلعه ا ب فى ى وضلعه ا حـ فى هـ فاذا تقاطع ب هـ ، حـ ى فى ل فبرهن على أن المثلث ب ل حـ يكافئ الشكل الرباعى ا ى ل هـ

(١١) ا س ب ، ا ص ب مثلثان قائما الزاوية مرسومان على وترهما المشترك ا ب و فى جهة واحدة منه فاذا رسم ا م ، ب هـ عمودين على امتداد س ص فبرهن على أن

$$\overline{\text{س م}}^{2}+\overline{\text{س هـ}}^{2}=\overline{\text{ص م}}^{2}+\overline{\text{ص هـ}}^{2}$$

(١٢) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية قسم وتره ا ب الى ثلاثة اقسام متساوية فى س ، ص والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{\text{حـ س}}^{2}+\overline{\text{حـ ص}}^{2}+\overline{\text{س ص}}^{2}=\frac{2}{3}\,\overline{\text{ا ب}}^{2}$$

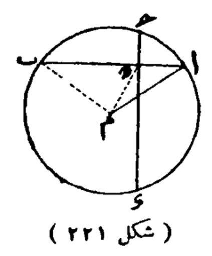
(١٣) دائرة مركزها م رسم فيها القطر ا ب وفرضت عليه النقطتان س ، ص فاذا فرضت نقطة ما على المحيط مثل هـ وكان م س = م ص فبرهن على ان

$$\overline{\text{هـ س}}^{2}+\overline{\text{هـ ص}}^{2}=\overline{\text{ا س}}^{2}+\overline{\text{ا ص}}^{2}=\overline{\text{ب س}}^{2}+\overline{\text{ب ص}}^{2}$$

(١٤) اذا قسم مستقيم الى قسمة ذات وسط وطرفين فبرهن على ان مجموع المربعين المنشأين على المستقيم بتمامه وجزئه الاصغر يكافئ ثلاثة أمثال المربع المنشأ على جزئه الاكبر

(١٥) دائرة مركزها م رسم فيها الوتران المتعامدان اهب ، حهء والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{حء}}^{2} = \text{٨}\,\overline{\text{ام}}^{2} - \text{٤}\,\overline{\text{مه}}^{2}$$



(شكل ٢٢١)

(البرهان) $\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اه}}^{2} + \overline{\text{به}}^{2} + \text{٢}\,\text{اه} \times \text{به}$
(متطابقة ٢)

، $\overline{\text{حء}}^{2} = \overline{\text{حه}}^{2} + \overline{\text{ءه}}^{2} + \text{٢}\,\text{حه} \times \text{ءه}$
(متطابقة ٢)

وبالجمع يكون

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{حء}}^{2} = \overline{\text{اه}}^{2} + \overline{\text{به}}^{2} + \overline{\text{حه}}^{2} + \overline{\text{ءه}}^{2} + \text{٢}\,\text{اه} \times \text{به} + \text{٢}\,\text{حه} \times \text{ءه}$$

وسبق ان برهنا فى المسألة الاولى من تمارين (٣٣) على ان

$$\overline{\text{اه}}^{2} + \overline{\text{به}}^{2} + \overline{\text{حه}}^{2} + \overline{\text{ءه}}^{2} = \text{المربع المنشأ على القطر} = \text{٤}\,\overline{\text{ام}}^{2}$$

اذن $\overline{\text{اب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{حء}}^{\text{٢}} = \text{٤}\,\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} + \text{٢}\,\text{اه} \times \text{به}$

$+ \text{٢}\,\text{حه} \times \text{ءه}$

ولكن $\text{٢}\,\text{اب} \times \text{به} = \text{٢}\,(\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} - \overline{\text{مه}}^{\text{٢}})$ (نظرية ٨٨)

و $\text{٢}\,\text{حه} \times \text{ءه} = \text{٢}\,(\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} - \overline{\text{مه}}^{\text{٢}})$ (نظرية ٨٨)

وبالتعويض يكون

$$\overline{\text{اب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{حء}}^{\text{٢}} = \text{٤}\,\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} + \text{٢}\,\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} - \text{٢}\,\overline{\text{مه}}^{\text{٢}}$$

$$+ \text{٢}\,\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} - \text{٢}\,\overline{\text{مه}}^{\text{٢}}$$

$= \text{٨}\,\overline{\text{ام}}^{\text{٢}} - \text{٤}\,\overline{\text{مه}}^{\text{٢}}$ وهو المطلوب

(١٦) اذا تقاطعت دائرتان فى ا ، ب وكان ح ء ، ه و المماسين المشتركين للدائرتين من الخارج ومد الوتر المشترك على استقامته حتى قابل المماسين فى س ، ص فبرهن على ان

$$\overline{\text{س ص}}^{\text{٢}} = \overline{\text{حء}}^{\text{٢}} + \overline{\text{اب}}^{\text{٢}}$$

(١٧) دائرة رسم فيها القطر ا ب موازياً الوتر ح ء فاذا فرضت نقطة ما على ا ب مثل ه فبرهن على ان

$$\overline{\text{هح}}^{\text{٢}} + \overline{\text{هء}}^{\text{٢}} = \overline{\text{اه}}^{\text{٢}} + \overline{\text{هب}}^{\text{٢}}$$

(١٨) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة للمثلثات المتكافئة المرسومة على قاعدة معلومة

(١٩) اذا قسم مستقيم قسمة ذات وسط وطرفين كان المستطيل

المكون من مجموع الجزأين وفاضلهما مكافئا المستطيل المكون من الجزأين

(٢٠) اذا مد من نقطة مثل ن خارج دائرة قاطع لها مثل ن ح ء وكان ن ه عمودا على قطر فى الدائرة مثل ا ب فبرهن على ان

$$\overline{\text{ن ه}}^{2} = \text{ن ح} \times \text{ن ء} - \text{ا ه} \times \text{ه ب}$$

« تمّ الجزء الثانى و يليه الجزء الثالث »

(مقرر السنتين الثالثة والرابعة من التعليم الثانوى)

مذكرات